GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

JUN 29 1929

5/10

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 160

Heft 3

Ausgegeben den 30. Mai 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 160. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hensel, Kurt, Über Systeme in einfachen Körpern	131
Lipka, Stephan, Eine Verallgemeinerung des *Rouché*schen Satzes	143
Pallas, Werner, Über eine Fläche, auf der die Asymptotenlinien ein Gewebe bilden	151
Tornier, Erhard, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie	177

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über Systeme in einfachen Körpern.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den Eigenschaften von Systemen oder Matrizen einer beliebigen endlichen Ordnung:

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}), \ldots \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

deren Elemente $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ einem und demselben Körper $\mathfrak{K}(a, b, \ldots)$ angehören, welchen ich als einen *einfachen Körper* bezeichnen will. Solche lassen sich aus allen Körpern und zwar meistens auf mannigfache Weise bilden, indem man die folgenden Eigenschaften durch geeignete Definitionen realisiert:

I. Jedem Elemente $a, b, \ldots$ von $\mathfrak{K}$ läßt sich je eine reelle Zahl $|a|, |b|, \ldots$, ihr *absoluter Betrag*, mit den folgenden Eigenschaften zuordnen:

1. $|0| = 0$, $|a| > 0$ für $a \neq 0$.
2. $|ab| = |a|\,|b|$.

Hieraus folgt speziell für das Einselement e von $\mathfrak{K}$, daß $|e| = 1$ sein muß.

II. In $\mathfrak{K}$ läßt sich ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}(a, a', b, \ldots)$ auszeichnen mit den folgenden Eigenschaften:

3. $\mathfrak{K}$ ist der Quotientenkörper von $\mathfrak{J}$.
4. $|a| \geqq 1$ für jedes $a \neq 0$ aus $\mathfrak{J}$.
5. Für die von Null verschiedenen Elemente a des Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ sind die positiven Zahlen $|a|$ entweder alle gleich 1 oder sie besitzen die einzige Häufungsstelle $+\infty$.
6. Zu einem beliebigen a und einem von Null verschiedenen Element b existiert stets ein drittes Element c aus $\mathfrak{J}$, so daß
$$|a - cb| < |b|$$
ist; d. h. im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist die sogenannte Division mit Rest stets ausführbar.

Aus den Darlegungen der Abhandlung des Herrn *Hasse* (ds. J. Bd. 159) und meiner eigenen Arbeit (ebenda Bd. 158, S. 195) folgt dann:

Jedes von Null verschiedene Element a aus dem Körper $\mathfrak{K}$ läßt sich in der Form

$$a = \varepsilon p^{\alpha} p'^{\alpha'} \cdots$$

darstellen, wo ε eine sog. *Einheit*, nämlich ein Element aus $\mathfrak{J}$ ist, dessen absoluter Betrag $|\varepsilon| = 1$ ist, und $p, p', \ldots$ *Primelemente*, d. h. von Null und von Einheiten verschiedene Elemente aus $\mathfrak{J}$ ohne echte Teiler in $\mathfrak{J}$ sind, und wo die Exponenten $\alpha, \alpha', \ldots$ ganze Zahlen bedeuten. Diese Zerlegung ist bis auf die Auswahl der ε, p, $p', \ldots$ unter assoziierten, d. h. sich nur um Einheitsfaktoren unterscheidenden Elementen, eindeutig.

Der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ besteht dabei aus allen und nur den Elementen a aus $\mathfrak{K}$, für welche $\alpha, \alpha', \ldots \geqq 0$ sind. Diese sollen *ganz* heißen, alle übrigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ heißen *gebrochen*.

Ist $|a| = 1$ für alle $a \neq 0$, so sind nach den obigen Ergebnissen *alle* $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ Einheiten in $\mathfrak{J}$, d. h. $\mathfrak{J}$ fällt mit $\mathfrak{K}$ zusammen, und es gibt dann kein einziges Prim-

element in $\mathfrak{K}$. Anderenfalls gibt es mindestens ein Primelement p. Die Anzahl der nicht assoziierten Primelemente kann dann endlich oder unendlich groß sein.

Ist $\mathfrak{K}(p, p', \ldots)$ ein Körper mit mindestens einem Primelemente p, so läßt sich $\mathfrak{K}$ durch geeignete Definition eines Betrages $|a|_p$ und eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}_p$ auch als einfacher Körper $\mathfrak{K}(p)$ mit dem einzigen Primelemente p auffassen. Man stelle dazu die von Null verschiedenen Elemente $a, a', \ldots$ aus $\mathfrak{K}$ in der Form

$$a = \varepsilon p^{\alpha}, \quad a' = \varepsilon' p^{\alpha'}, \ldots$$

dar, wo $p^{\alpha}, p^{\alpha'}, \ldots$ die ganzen in $a, a', \ldots$ enthaltenen Potenzen von p bedeuten, während $0 = p^{\infty}$ zu nehmen ist. Man setze jetzt

$$|a|_p = k^{\alpha}, \quad |a'|_p = k^{\alpha'}, \ldots, |0|_p = 0,$$

wo k irgendeine reelle Zahl > 1 ist. Dann sind die Forderungen (1) und (2) erfüllt.

Ferner definieren wir $\mathfrak{J}_p$ als die Gesamtheit aller Elemente $a = \varepsilon p^{\alpha}, \ldots$ mit den Exponenten $\alpha, \alpha', \ldots \geqq 0$. Dann *ist* $\mathfrak{J}_p$ ein Integritätsbereich, weil er $0 = p^{\infty}$ und $1 = p^0$ enthält und mit a und a' auch $a + a'$ und aa'. Der genaue Exponent, zu dem p in $a + a'$ bzw. in aa' aufgeht, ist nämlich mindestens gleich dem kleineren der beiden Exponenten α und α' (also $\geqq 0$) bzw. genau gleich der Summe $\alpha + \alpha'$.

Dann sind für den Integritätsbereich $\mathfrak{J}_p$ ersichtlich die Forderungen (3)—(5), und (6) erfüllt, denn $\mathfrak{K}$ *ist* der Quotientenkörper zu $\mathfrak{J}_p$, die positiven Zahlen $|a|_p = k^{\alpha}$ sind alle $\geqq 1$, und sie haben die einzige Häufungsstelle $+\infty$; und schließlich ist auch die Division mit Rest innerhalb $\mathfrak{J}_p$ stets ausführbar. Ist nämlich $|a|_p \geqq |a'|_p$, d. h. $\alpha \geqq \alpha'$, so gehört $c = \frac{a}{a'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} p^{\alpha - \alpha'}$ zu $\mathfrak{J}_p$, und für dieses c ist $|a - ca'|_p = |0|_p < |a'|_p$. Ist dagegen $|a|_p < |a'|_p$, so ist mit $c = 0$ einfach $|a - 0 \cdot a'|_p = |a|_p < |a'|_p$. Somit ist $\mathfrak{K}(p)$ auf Grund dieser Definition von $|a|_p$ und $\mathfrak{J}_p$ in der Tat ein einfacher Körper mit dem einzigen Primelemente p.

Es werde endlich noch besonders hervorgehoben, daß auf Grund von (5) für beliebige einfache Körper die Anzahl aller nicht assoziierten ganzen Elemente a, welche kleiner als ein beliebiges Element a_0 sind, für welche also $|a| < |a_0|$ ist, stets endlich ist.

I.

Ich betrachte im folgenden den Ring $R(A, B, \ldots)$ aller Systeme n-ter Ordnung, deren Elemente $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ Zahlgrößen eines einfachen Körpers $\mathfrak{K}(a, b, \ldots)$ sind. Ein System A heißt *ganz* oder gebrochen je nachdem alle oder nicht alle seine Elemente a_{ik} ganz sind. Die Summe, die Differenz und das Produkt von ganzen Systemen ist offenbar wieder ganz; ebenso sind die abgeleiteten $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n)} = |A|$, d. h. die aus den Unterdeterminanten zweiter, dritter, ... Ordnung von A gebildeten Systeme, für ein ganzes System offenbar ebenfalls ganz.

Ein System (a_i) heißt ein *Diagonalsystem*, wenn alle Elemente außerhalb seiner Hauptdiagonale Null sind, während seine n Diagonalelemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebig sein können. Speziell heißt (a_i) ein *normales Diagonalsystem*, wenn jedes Element a_i ein Teiler des nächstfolgenden ist. Sind alle $a_i = a$ einander gleich, so heißt (a) ein *Skalarsystem* und wird kurz durch a bezeichnet.

Ich definiere nun die Teilbarkeit eines Systems durch ein anderes folgendermaßen:

Ein System B heißt ein *Vielfaches* oder *Multiplum* eines anderen A, oder A heißt ein *Divisor* oder *Teiler* von B, wenn $B = PAQ$ ist, wo P und Q *ganze* Systeme aus R sind. Ist auch umgekehrt $A = RBS$ ein ganzes Vielfaches von B, so heißen A und B *äquivalent* $(A \sim B)$.

Ist C Multiplum von B und B Multiplum von A, so ist C Multiplum von A. Ist $B = PAQ$ ein Vielfaches von A und sind speziell die ganzen Multiplikatoren P und Q Einheiten, deren Reziproke P^{-1} und Q^{-1} wieder ganz sind, so folgt schon aus der obigen Gleichung, daß $A = P^{-1}BQ^{-1}$, und hieraus, daß auch A ein Multiplum von B, daß also $A \sim B$ ist. Bekanntlich ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die ganzen Multiplikatoren P und Q unimodular, d. h. wenn ihre Determinanten $|P| = \varepsilon$, $|Q| = \varepsilon'$ beide Einheiten in $\mathfrak{R}$ sind.

Von zwei Diagonalsystemen (b_i) und (a_i) heißt das erste ein *diagonales Multiplum* des zweiten, wenn $(b_i) = (g_i)(a_i)$ und (g_i) ein ganzes Diagonalsystem ist, wenn also allgemein jedes Element $b_i = g_i a_i$ von (b_i) ein ganzes Vielfaches des entsprechenden Elementes von (a_i) ist. Zwei Diagonalsysteme (b_i) und (a_i) heißen *diagonal äquivalent*, wenn jedes ein diagonales Multiplum des anderen ist, wenn also $(b_i) = (\varepsilon_i)(a_i)$ ist, wo (ε_i) ein Einheitsdiagonalsystem ist.

Ein System $B = (b_{ik})$ ist dann und nur dann ein Vielfaches eines Skalarsystemes d, wenn $B = P \cdot d \cdot Q = d \cdot (PQ) = d\bar{B}$ ist, wo $\bar{B} = PQ$ ein ganzes System ist, wenn also $(b_{ik}) = (d\bar{b}_{ik})$, d. h. d ein gemeinsamer Teiler aller n^2 Elemente b_{ik} von B ist. Ist also

$$b = (b_{11}, \ldots, b_{ik}, \ldots, b_{nn})$$

der *größte* gemeinsame Teiler aller Elemente von B, der sog. *Teiler des Systemes* B, so sind alle und nur die Skalarteiler von B die sämtlichen Divisoren dieses Teilers b. B hat dann und nur dann den Skalarteiler 0, wenn $B = 0$ ist.

Ist $B = bB_0$ ein beliebiges System, b sein Teiler, so ist also $B_0 = (b_{ik}^{(0)})$ ein sog. *primitives ganzes System*, d. h. ein solches, welches den Teiler 1 hat. Man erkennt sofort, daß B ein ganzes oder ein gebrochenes System ist, je nachdem sein Teiler b ganz oder gebrochen ist.

Ist $B = bB_0$ ein Vielfaches von $A = aA_0$, so folgt aus der Gleichung $B = PAQ = aPA_0Q = a\bar{B}$, wo $\bar{B}$ ganz ist, daß der Teiler a von A ein Divisor des Teilers b von B ist, wenn A Teiler von B ist. Ist speziell $B \sim A$, so ist also $b = a$; äquivalente Systeme haben hiernach bei geeigneter Normierung gleiche Teiler.

Wir wollen im folgenden die Frage lösen, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Enthaltensein eines Systemes in einem anderen sind, und insbesondere, wann zwei Systeme äquivalent sind.

Zunächst ergibt sich aus der Betrachtung der abgeleiteten Systeme sofort eine ganze Reihe von notwendigen Bedingungen für das Enthaltensein von A in B. In der Tat folgt ja aus einer Gleichung

$$B = PAQ$$

mit ganzen Multiplikatoren durch Übergang zu den ϱ-ten abgeleiteten Systemen

$$B^{(\varrho)} = P^{(\varrho)} A^{(\varrho)} Q^{(\varrho)},$$

wo die Multiplikatoren $P^{(\varrho)}$, $Q^{(\varrho)}$ ebenfalls ganz sind. Ist also B ein Multiplum von A, so ist jedes abgeleitete $B^{(\varrho)}$ ein Vielfaches des entsprechenden $A^{(\varrho)}$. Sind also $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n}$ und $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ die Teiler jener abgeleiteten Systeme, also die größten gemeinsamen Teiler aller Unterdeterminanten 1, 2, . . ., n-ter Ordnung von B bzw. von A, so ist nur dann B durch A teilbar, wenn jeder Determinantenteiler $b^{(\varrho)}$ von B durch den entsprechenden Determinantenteiler $a^{(\varrho)}$ von A teilbar ist. Ist also speziell $B \sim A$, so müssen die entsprechenden Determinantenteiler $b^{(\varrho)}$ und $a^{(\varrho)}$ äquivalent, d. h. bei geeigneter Normierung einander gleich sein.

Es sei nun speziell $A = (a_i)$ ein normales Diagonalsystem; dann ist jedes abgeleitete System $A^{(\varrho)} = (a_i^{(\varrho)})$ ein Diagonalsystem, dessen Elemente $a_i^{(\varrho)} = a_{1'} a_{2'} \cdots a_{\varrho'}$ alle Produkte der a_i zu je ϱ sind, und da jedes folgende Element von A durch jedes vorhergehende teilbar ist, so ist der Skalarteiler von $A^{(\varrho)}$ offenbar:

$$a^{(\varrho)} = a_1 a_2 \cdots a_\varrho .$$

Hieraus folgt sofort für die Äquivalenz von zwei normalen Diagonalsystemen der wichtige Satz:

Zwei normale Diagonalsysteme (b_i) und (a_i) sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie diagonal äquivalent sind, d. h. wenn allgemein $b_i = \varepsilon_i a_i$ ist.

Denn die n Äquivalenzen $b_1 \cdots b_\varrho \sim a_1 \cdots a_\varrho$ haben ja die anderen $b_\varrho \sim a_\varrho$ oder $b_\varrho = \varepsilon_\varrho a_\varrho$ zur notwendigen Folge.

Aus diesen Betrachtungen leite ich nun den folgenden Satz her:

Jedes System A ist einem und abgesehen von diagonal äquivalenten (d. h. abgesehen von multiplikativen Einheiten) auch nur einem normalen Diagonalsysteme äquivalent.

Mit diesem Satze ist dann sofort der allgemeinere bewiesen, welcher die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Systeme ausspricht:

Zwei Systeme A und A' sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie demselben normalen Diagonalsysteme (a_i) äquivalent sind.

Da nach dem vorher bewiesenen Satze zwei nicht diagonal äquivalente normale Diagonalsysteme nicht äquivalent sein können, so braucht nur bewiesen zu werden, daß jedes System A einem solchen Diagonalsysteme (a_i) äquivalent sein muß.

Dies geschieht am einfachsten durch den Nachweis, daß A durch vordere und hintere Multiplikation mit gewissen unimodularen Elementarsystemen in ein normales Diagonalsystem übergeht.

Für diese Elementarsysteme kann und will ich die schon in meiner früheren Arbeit[1]) benutzten Systeme wählen:

$$(1) \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & t & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

mit der Maßgabe, daß in $W(t)$ das Element t ganz und in $T(\varepsilon)$ das in der Hauptdiagonale auftretende Element ε eine Einheit sein soll. Dann sind diese Systeme unimodular, da ihre Determinanten gleich den Einheiten -1, $+1$, ε sind. Beachtet man, welche Veränderungen durch vordere oder hintere Multiplikation mit einem solchen Elementarsysteme bei einem beliebigen Systeme A bewirkt werden, so ergibt sich offenbar der Satz:

Ein System geht in ein äquivalentes über, wenn man in ihm zwei beliebige Parallelreihen vertauscht, oder wenn man zu einer Reihe ein ganzes Vielfaches einer Parallelreihe addiert, oder wenn man eine seiner Reihen mit einer Einheit multipliziert.

Ich zeige nun induktiv, daß und wie durch diese drei Umformungen ein beliebiges System n-ter Ordnung A sukzessive in ein äquivalentes normales Diagonalsystem (a_i) übergeführt werden kann. Da dies für ein System erster Ordnung $A = a_{11} = a_1$ selbstverständlich ist, so nehme ich dabei an, daß der Beweis für Systeme $(n-1)$-ter Ordnung bereits geführt ist, und weise nach, daß der Satz auch für Systeme n-ter Ordnung gilt.

[1]) *K. Hensel*, Über den Zusammenhang zwischen den Systemen und ihren Determinanten, ds. J. Bd. 159, S. 246—254, vgl. S. 250.

Ich brauche diesen Beweis nur für ein *ganzes* System zu führen, denn ist $A = a A_0$ irgend ein gebrochenes System mit dem Teiler a und ist für das ganze primitive A_0 und die unimodularen ganzen Multiplikatoren P und Q $PA_0Q = (a_i^{(0)})$, wo $(a_i^{(0)})$ normal ist, so folgt durch Multiplikation mit dem Skalarsystem (a) daß auch $P(aA_0)Q = PAQ = (a a_i^{(0)}) = (a_i)$ ist, und auch dieses Diagonalsystem $(a a_i^{(0)})$ ist normal, weil jedes folgende Element ein Multiplum des vorhergehenden ist.

Um nun diesen induktiven Beweis zu führen, zeige ich folgendes: Ein beliebiges ganzes System A mit dem Teiler a_1 kann durch die drei Elementartransformationen stets übergeführt werden in ein äquivalentes

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

wo also das Kernsystem $(n-1)$-ter Ordnung A_{22} mindestens den Teiler a_1 enthalten muß. Damit ist aber der ganze Beweis geführt, denn nach unserer Annahme geht ja A_{22} durch entsprechende Elementartransformationen, die die beiden berandenden Reihen h_1 und v_1 offenbar nicht ändern, in ein normales Diagonalsystem $(n-1)$-ter Ordnung $\begin{pmatrix} a_2 & & \\ & \cdot & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ über; also geht das ganze System A durch diese Umformungen in $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ über, wo auch a_1 ein Teiler von a_2 ist, und damit ist der Beweis geführt.

Ich zeige nun zunächst folgendes: Ein beliebiges ganzes System A vom Teiler a_1 kann durch die drei Elementartransformationen (1) in ein äquivalentes System

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & A_{22}' \end{pmatrix}$$

übergeführt werden, wo $a_1' \gtrsim a_1$ ist.
Ist dann schon $a_1' \sim a_1$, so ist damit unser Beweis geführt, weil ja dann $a_1' \sim a_1$ ein Teiler von A_{22}' ist.

Ist nämlich $a_1 = 0$, also $A = 0$, so ist der Satz ja schon bewiesen. Ist $A \neq 0$, so enthält dieses System mindestens ein von Null verschiedenes Element, und dies kann durch Reihenvertauschungen an die erste Stelle gebracht werden. Es kann also auch von vornherein $a_{11} \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Hierauf kann durch Reihensubtraktionen erreicht werden, daß alle übrigen Elemente von h_1 und v_1 kleiner als a_{11} werden. Ist nachher auch nur eines dieser Elemente > 0, so kann dies durch eine Reihenvertauschung an die erste Stelle gebracht und damit a_{11} verkleinert werden, und in gleicher Weise kann man so lange fortfahren, bis man nach einer endlichen Anzahl von Elementartransformationen zu einem äquivalenten System (3) gelangt.

Ist dann noch $a_1' > a_1$, so kann man durch weitere elementare Umformungen (1) a_1' noch weiter verkleinern, bis man zu dem äquivalenten System (2) und damit zum Beweise unserer Behauptung gekommen ist. In der Tat enthält ja bei dieser Annahme

A'_{22} mindestens ein nicht durch a'_1 teilbares Element. Addiert man also dessen Horizontalreihe zur ersten, so enthält diese als erstes Element a'_1 und außerdem mindestens ein nicht durch a'_1 teilbares Element. Durch das vorher befolgte Verfahren geht also dieses System in ein zu (3) äquivalentes gleicher Art über, dessen Anfangsglied $a''_1 < a'_1$ ist; und damit ist unser Satz in vollem Umfange bewiesen.

Durch diesen wichtigen Satz erhält man eine vollständige Einteilung aller Systeme von $\mathfrak{R}$ in so viele Klassen, als es verschiedene normale Diagonalsysteme (a_i) gibt. Die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des zu einem System A äquivalenten normalen Diagonalsystems (a_i) heißen bekanntlich *der erste, zweite, . . ., n-te Elementarteiler von A*.

II.

Aus der im vorigen Abschnitte bewiesenen Gleichung:

$$A = P^{-1}(a_i)Q^{-1},$$

in welcher auch P^{-1} und Q^{-1} aus den Elementarsystemen V, W, $T(\varepsilon)$ zusammengesetzt sind, in Verbindung mit der Tatsache, daß jedes Diagonalsystem multiplikativ aus den drei weiteren Typen von Elementarsystemen:

$$T(p), \quad T\left(\frac{1}{p}\right), \quad T(0)$$

zusammengesetzt werden kann, wo p jedes Primelement aus $\mathfrak{R}$ bedeuten darf, folgt unmittelbar der Satz:

Jedes System aus $\mathfrak{R}$ ist aus den sechs Typen von Elementarsystemen:

$$V, \quad W(t), \quad T(\varepsilon), \quad T(p), \quad T\left(\frac{1}{p}\right), \quad T(0) \tag{4}$$

multiplikativ zusammengesetzt. Speziell sind alle Systeme vom Range n aus den fünf ersten, alle ganzen aus den vier ersten und alle unimodularen Systeme aus den drei ersten multiplikativ zusammengesetzt.

Betrachtet man denselben Ring $R(A, B, \ldots)$ aller Systeme aus $\mathfrak{R}(a, b, \ldots)$, faßt man aber jetzt diesen einfachen Koeffizientenkörper als Körper $\mathfrak{R}(p)$ mit nur einer dieser Primzahlen auf, so bleibt er, wie in der Einleitung gezeigt wurde, ein einfacher Körper. Dann heißt B ein Vielfaches von A, wenn $B = PAQ$ ist mit *modulo p* ganzen Multiplikatoren, und entsprechendes gilt für die Definition der Äquivalenz von B und A modulo p. Weil aber auch $\mathfrak{R}(p)$ ein einfacher Körper ist, so gelten für das Enthaltensein und die Äquivalenz modulo p der Systeme genau dieselben Sätze und Ergebnisse wie vorher.

Jedes System A ist also modulo p einem und nur einem normalen Diagenalsysteme $(a_i) = (p^{\alpha_i})$ äquivalent, in welchem die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine nicht abnehmende Reihe bilden, und wo $p^{+\infty}$ für Null steht. Diese Potenzen p^{α_i} nennt man entsprechend *die Elementarteiler von A modulo p*.

Jedes absolut normale Diagonalsystem (a_i) kann man eindeutig zerlegen in ein Produkt

$$(a_i) = (\varepsilon_i)(p^{\alpha_i})(q^{\beta_i})(r^{\gamma_i})\cdots \tag{5}$$

von einem diagonalen Einheitssystem (ε_i) und von normalen Diagonalsystemen modulo p, modulo $q, \ldots$, deren Elemente bzw. die Potenzen von $p, q, r, \ldots$ sind, welche in den a_i enthalten sind, mit der Maßgabe, daß ein eventuell auftretendes $0 = p^\infty q^\infty r^\infty \cdots$ zu zerlegen ist, und wo das Produkt rechts auf alle Primzahlen in $\mathfrak{R}$ erstreckt werden kann, denen natürlich fast immer ein Einheitssystem (1) entspricht.

Da ferner die in der Äquivalenzgleichung $PAQ = (a_i)$ auftretenden, absolut unimodularen Multiplikatoren P und Q auch modulo p, modulo $q, \cdots$ unimodular sind, und da

z. B. die Elementarsysteme (q^{β_i}), (r^{γ_i}), ... modulo p betrachtet Einheitssysteme sind, so sind die aus dieser Zerlegung (5) sich ergebenden Diagonalsysteme (p^{α_i}), (q^{β_i}), ... die zu A modulo p, modulo q, ... äquivalenten normalen Diagonalsysteme. Zwei Systeme sind also dann und nur dann absolut äquivalent, wenn sie modulo jedem Primteiler $p, q, r, \ldots$ von $\mathfrak{R}$ äquivalent sind.

Die bisher durchgeführten Betrachtungen ermöglichen es nun, den zweiten Hauptsatz aus der Theorie der Systeme in sehr einfacher Art zu beweisen:

Ein System B ist dann und nur dann ein Vielfaches eines anderen A, wenn von den zu B und A äquivalenten normalen Diagonalsystemen (b_i) und (a_i) das erste ein diagonales Vielfaches des zweiten, wenn also

$$(b_i) = (g_i)(a_i) \tag{6}$$

ist, wo (g_i) ein ganzes Diagonalsystem bedeutet. Dann und nur dann ist also B ein Vielfaches von A, wenn jeder Elementarteiler von B ein Vielfaches des entsprechenden Elementarteilers von A ist.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, sieht man unmittelbar: Ist nämlich

$$B \sim (b_i),\ A \sim (a_i) \text{ und ist } (b_i) = (g_i)(a_i),$$

so folgt aus den beiden Gleichungen mit den unimodularen Multiplikatoren P, Q, R, S

$$PBQ = (b_i),\quad RAS = (a_i)$$

$$B = (P^{-1}(g_i)R) \cdot A \cdot (SQ^{-1}) = GAG_1,$$

wo G und G_1 beide ganz sind.

Den noch fehlenden Beweis für die Notwendigkeit dieser Bedingung führe ich nur für den Bereich eines beliebigen Primteilers p, d. h. ich zeige:

Ist modulo p $B = GAG_1$ wo jetzt G und G_1 modulo p ganze Multiplikatoren sind, und sind (p^{β_i}) und (p^{α_i}) die zu B und A äquivalenten normalen Diagonalsysteme, so ist

$$(p^{\beta_i}) = (p^{\gamma_i})(p^{\alpha_i}), \tag{6 a}$$

wo (p^{γ_i}) ganz, d. h. alle $\gamma_i \geqq 0$ sind.

Ist dieser Satz nämlich für eine beliebige, also auch für jede Primzahl p bewiesen, so gilt er auch in dem Falle, daß $B = PAQ$ ein absolut ganzes Multiplum von A ist; denn dann ist ja auch B für jede Primzahl $p, q, \ldots$ ein ganzes Vielfaches von A, und hieraus folgt:

$$(b_i) = \prod_p (p^{\beta_i}) = \prod_p (p^{\gamma_i})(p^{\alpha_i}) = (g_i)(a_i),$$

wo die Produkte auf alle Primteiler von $\mathfrak{R}$ zu erstrecken sind, und hier ist wirklich $(g_i) = \prod_p (p^{\gamma_i})$ ein absolut ganzes Diagonalsystem.

Offenbar braucht nun der Beweis dieses letzten Satzes nur für die Voraussetzung geführt zu werden, daß entweder $B = GA$ ein vorderes oder daß $B = AG_1$ ein hinteres ganzes Multiplum von A ist. Wir zeigen also nur, daß aus der Annahme

$$B = GA \text{ notwendig } (p^{\beta_i}) = (p^{\gamma_i})(p^{\alpha_i}) \quad (\gamma_i \geqq 0) \tag{7}$$

folgt. Da ferner jedes modulo p *ganze* System G ein Produkt aus unimodularen Systemen und den beiden Elementarsystemen

$$T(p) = (p) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & p & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T(0) = (0) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

ist, und da für unimodulare Multiplikatoren bereits nachgewiesen ist, daß $(p^{\beta_i}) = (1)(p^{\alpha_i})$, daß für sie also unser Satz richtig ist, so ist nur noch zu beweisen, daß er auch gilt, wenn G eins von den beiden Elementarsystemen (p) und (0) ist.

Wir werden diesen Beweis nur für die erste Annahme führen, daß der Multiplikator $G = (p)$ ist, und dann nachweisen, daß aus ihm seine Richtigkeit für $G = (0)$ folgt. Ich bezeichne dazu durch $(p)_k$ bzw. $(0)_k$ dasjenige Elementarsystem (p) oder (0), in welchem das Primelement p oder 0 an der k-ten Diagonalstelle steht und beweise diesen Satz gleich in der folgenden schärferen Fassung, welche auch an sich von Interesse ist:

Ist $A = (h_1 \ldots h_k \ldots h_n)$, $B = (p)_k A = (h_1 \ldots ph_k \ldots h_n)$ und sind (p^{α_i}) und (p^{β_i}) die ihnen äquivalenten normalen Diagonalsysteme, so ist stets:

$$(p^{\beta_i}) = (p)_{k'}\ (p^{\alpha_i})\,.$$

Auch dieser Satz läßt sich sehr einfach induktiv beweisen: Für Systeme erster Ordnung:

$$A = a,\quad B = (p)_1 A = pa$$

ist er selbstverständlich. Wir nehmen an, er sei für Systeme $(n-1)$-ter Ordnung bewiesen, und zeigen seine Richtigkeit für Systeme n-ter Ordnung:

$$A = (h_1 \ldots h_k \ldots h_n) \text{ und } B = (h_1 \ldots ph_k \ldots h_n)\,.$$

Es sei nun $a_1 = p^{\alpha_1}$ der Teiler von A modulo p, d. h. die Potenz von p, welche im kleinsten Elemente von A enthalten ist. Dann ist der Teiler von B offenbar pa_1 oder wieder a_1, je nachdem das kleinste Element oder die kleinsten Elemente von A nur in h_k auftreten, oder wenigstens ein kleinstes Element von A auch in einer von h_k verschiedenen Zeile $h_{\bar{k}}$ vorkommt. Denn im ersten Falle hat ja ph_k in B den Zahlenteiler pa_1, welcher dann n. d. V. auch in allen anderen Elementen von B enthalten ist.

Dann ergibt sich leicht, daß man in dem einen oder im anderen Falle die beiden Systeme A und B entweder in zwei ihnen äquivalente

$$\text{(9)} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} pa_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

oder in

$$\text{(9 a)} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (p)'_{k''} A_{22} \end{pmatrix}$$

überführen kann, in welchen jedesmal A_{22} bzw. $(p)'_{k''} A_{22}$ je ein System $(n-1)$-ter Ordnung ist, welches den Divisor pa_1 bzw. a_1 besitzt. In beiden Fällen ist aber damit unser Satz bewiesen. Da nämlich nach unserer Voraussetzung über die Systeme $(n-1)$-ter Ordnung

$$A_{22} \sim (a_i) \qquad (p)'_{k''} A_{22} \sim (p)'_{k'} (a_i) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

ist, wo $(p)'_{k'}$ ein neues Elementarsystem $(n-1)$-ter Ordnung bedeutet, so lassen sich A und B durch die drei Elementartransformationen überführen in die äquivalenten normalen Diagonalsysteme:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} A \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} = (a_i) \qquad & B \sim \begin{pmatrix} pa_1 & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} = (p)_1\,(a_i) \\ A \sim \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} = (a_i) \qquad & B \sim \begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ 0, & (p)'_{k'}\,(a_i) \end{pmatrix} = (p)_{k'}\,(a_i)\,, \end{aligned}$$

und damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Überführung der beiden Systeme

$$A = (h_1 \ldots h_k \ldots h_n) \quad \text{und} \quad B = (h_1 \ldots ph_k \ldots h_n)$$

in die ihnen äquivalenten normalen Diagonalsysteme (9) oder (9a) geschieht nun in den beiden unterschiedenen Fällen auf die folgende Weise. Durch eine und dieselbe Zeilenvertauschung in A und B, nämlich h_k mit h_1 im ersten bzw. $h_{\bar{k}}$ mit h_1 im zweiten Falle, und durch eine und dieselbe Kolonnenvertauschung bringen wir das homologe kleinste Element an die erste Stelle und befreien es von seiner Einheit, so daß in den beiden äquivalenten Systemen a_1 und $p\,a_1$ bzw. a_1 und a_1 an erster Stelle stehen und alle weiteren Elemente beider Systeme Vielfache dieser ersten sind.

Wir bringen dann zuerst alle übrigen Elemente der ersten Zeile in A und in B durch Kolonnenverbindungen auf Null, und hierauf machen wir dasselbe für die erste Vertikalreihe von A und B. Dadurch erhalten wir die beiden zu A und B äquivalenten Systempaare (9) und (9a) und den vollen Beweis unseres Satzes für den Multiplikator (p).

Mit Hilfe dieses Ergebnisses kann nun dasselbe Resultat für den Multiplikator (0) folgendermaßen bewiesen werden. Es sei bei den beiden Systemen:

$$A = (h_1 \ldots h_k \ldots h_n) \text{ und } B = (p)_k A = (h_1 \ldots p h_k \ldots h_n)$$

das aus den $n-1$ Horizontalreihen $(h_1 \ldots h_{k-1}\, h_{k+1} \ldots h_n)$ gebildete System äquivalent dem normalen Diagonalsysteme:

$$(a_1 \ldots a_\nu\, 0 \ldots 0) \quad \text{wo} \quad \nu \leqq n-1$$

ist. Ist dann speziell der Divisor der k-ten Zeile h_k größer als das größte von Null verschiedene Element a_ν dieses Diagonalsystemes, so tritt bei der sukzessiven Überführung von A und B in die ihnen äquivalenten normalen Diagonalsysteme immer die zweite der beiden oben angegebenen Möglichkeiten auf. In der Tat findet sich unter dieser Voraussetzung das kleinste Element a_1 von A nicht in h_k, es sind also wirklich A und B äquivalent den beiden Systemen (9a). Bei den hierbei angewandten Elementartransformationen bleibt aber das System $(h_1 \ldots h_{k-1} h_{k+1} \ldots h_n)$ von A äquivalent dem neuen $(h_1' \ldots h_{k'-1}' h_{k'+1}' \ldots h_n')$, dieses letztere ist somit ebenfalls äquivalent $(a_1 \ldots a_\nu 0 \ldots 0)$; also ist das aus den $n-2$ Zeilen $(h_2' \ldots h_{k'-1}' h_{k'+1}' \ldots h_n')$ gebildete Teilsystem von A_{22} äquivalent $(a_2 \ldots a_\nu\, 0 \ldots 0)$. Da andererseits bei diesen Umformungen der Teiler von $h_{k'}'$ höchstens vergrößert wird, so hat das Teilsystem A_{22} wieder genau die vorher für A vorausgesetzte Eigenschaft; bei seiner weiteren Umformung tritt also wieder die zweite Möglichkeit (9a) ein usw. Hiernach wird also in diesem Falle zuletzt:

$$\begin{aligned} A &\sim (a_i) = (a_1 \ldots a_\nu\, a_{\nu+1} 0 \ldots 0) \\ B &\sim (p)_{\nu+1}(a_i) = (a_1 \ldots a_\nu\, p\, a_{\nu+1} 0 \ldots 0). \end{aligned} \tag{11}$$

Durch wiederholte Anwendung dieses letzten Ergebnisses überzeugt man sich, daß unter der hier über A gemachten Voraussetzung, welche ja natürlich auch für $(p)_k A = (\ldots p h_k \ldots)$, $(p^2)_k A = (\ldots p^2 h_k \ldots)$, ... a fortiori zutrifft, genau das Entsprechende auch dann gilt, wenn die Systeme A und B durch eine Gleichung:

$$B = (p^r)_k A = (h_1 \ldots p^r h_k \ldots h_n)$$

zusammenhängen, wo p^r irgendeine positive Potenz von p bedeutet. Also ergibt sich allgemeiner, daß in diesem Falle:

$$\begin{aligned} A &\sim (a_i) = (a_1 \ldots a_\nu\, a_{\nu+1}\, 0 \ldots 0) \\ B &\sim (p^r)_{\nu+1}(a_i) = (a_1 \ldots a_\nu\, p^r a_{\nu+1}\, 0 \ldots 0) \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt durch den Übergang $r \to \infty$, weil $p^\infty = 0$, also $(p^\infty)_k = (0)_k$ ist, daß bei der hier über das System A gemachten Voraussetzung, falls

$$B = (0)_k A = (h_1 \ldots 0 \ldots h_n)$$

ist, dann von den zu A und B äquivalenten normalen Diagonalsystemen das zweite wieder ein diagonales Multiplum des ersten ist, daß nämlich

$$(12)\qquad \begin{aligned} A &\sim (a_i) = (a_1 \dots a_\nu a_{\nu+1} 0 \dots 0) \\ B &\sim (0)_{\nu+1}(a_i) = (a_1 \dots a_\nu\ 0\quad 0 \dots 0) \end{aligned}$$

ist, daß also unter dieser Voraussetzung über A unser Satz auch für das zweite Elementarsystem (0) als Multiplikator gilt.

Sehr leicht kann man nun aber endlich zeigen, daß er auch für ein ganz beliebiges System A gilt. In der Tat sei p^ϱ die kleinste Potenz von p, für welche in dem Systeme

$$(p^\varrho)_k A = (h_1 \dots p^\varrho h_k \dots h_n)$$

der Teiler von $p^\varrho h_k$ größer ist, als das größte von Null verschiedene Element des zu $(h_1 \dots h_{k-1} h_{k+1} \dots h_n)$ äquivalenten normalen Diagonalsystems. Dann folgt durch ϱ-malige Anwendung des zuerst bewiesenen allgemeinen Satzes:

$$(p^\varrho)_k A \sim (p)_{k_1} (p)_{k_2} \cdots (p)_{k_\varrho} (a_i),$$

wenn $A \sim (a_1 \dots a_{\nu+1} 0 \dots 0)$ ist, wobei $k_1, k_2, \dots, k_\varrho$ gewisse ϱ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ bedeuten. Ist dann r eine beliebige positive ganze Zahl, so ist nach dem letzten Beweise:

$$(p^r)_k (p^\varrho)_k A = (p^{r+\varrho})_k A \sim (p)_{k_1} \cdots (p)_{k_\varrho} (p^r)_{\nu+1} (a_i),$$

und somit wird für r bzw. $(r+\varrho) \to +\infty$

$$(13)\qquad (0)_k A \sim (p)_{k_1} (p)_{k_2} \cdots (p)_{k_\varrho} (0)_{\nu+1} (a_i) = (g_i)(a_i),$$

und damit ist unser Hauptsatz jetzt in seinem vollen Umfange bewiesen.

III.

Zum Abschluß dieser Untersuchungen gebe ich noch einen zweiten nicht induktiven Beweis unseres Fundamentalsatzes, welcher in seinem Ergebnisse einen tieferen Einblick in dieses Problem gewährt.

Es sei wieder $A = (a_{ik}) = (h_1 \dots h_{n-1} h_n)$ ein beliebiges System und

$$B_p = (p)_n A = (h_1 \dots h_{n-1}\, p h_n), \qquad B_0 = (0)_n A = (h_1 \dots h_{n-1} 0)$$

die beiden Multipla von A, welche aus ihm durch vordere Multiplikation mit den beiden Elementarsystemen $(p)_n$ und $(0)_n$ hervorgehen, und bei denen, was die Allgemeinheit offenbar nicht beeinträchtigt, das Element p bzw. 0 an der letzten Diagonalstelle steht.

Wir führen jene Systeme A, B_p, B_0 zunächst simultan dadurch in äquivalente über, daß wir durch die drei Elementartransformationen das ihnen gemeinsame Partialsystem $(h_1 \dots h_{n-1})$ in das ihm äquivalente normale Diagonalsystem $(a_1 \dots a_{n-1})$ transformieren. Dadurch erhalten wir drei zu jenen äquivalente Systeme, welche in leicht verständlicher Weise folgendermaßen geschrieben werden können:

$$(14)\quad A \sim \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \\ a'_n & \cdots & a'_{n-1}\ a'_n \end{pmatrix}, \quad B_p \sim \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \\ pa'_n & \cdots & pa'_{n-1}\ pa'_n \end{pmatrix}, \quad B_0 \sim \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

in welchen jedes Element $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ein Multiplum des vorhergehenden, d. h. $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ ist.

Wir können aber gleich voraussetzen, daß dasselbe für die n Elemente $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ der letzten Zeile gilt. Ist nämlich z. B. $a'_2 < a'_1$, so erhält man durch Addition der zweiten zur ersten Vertikalreihe ein äquivalentes System, dessen erste

Vertikalreihe an Stelle von a_1' das Element $a_2' + a_1' \sim a_2'$ enthält, und deren an zweiter Stelle stehendes Element a_2 durch Zeilensubtraktion wieder beseitigt werden kann. Ebenso können auch die Einheiten der a_i' durch Reihendivisionen beseitigt werden. Hieraus folgt schon, daß das letzte System B_0 dem normalen Diagonalsystem $(a_1 \ldots a_{n-1}\, 0)$ äquivalent ist. Man kann aber nun auch die zu A und B_p äquivalenten normalen Diagonalsysteme berechnen, und hierauf nachweisen, daß das erstere ein Diagonalteiler sowohl des zweiten, als auch des zu B_0 gehörigen ist, und darin liegt ja der Beweis unseres Hauptsatzes.

Zu diesem Zwecke betrachte ich die n Quotienten

$$(15) \qquad \alpha_1 = \frac{a_1}{a_1'}, \qquad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_2'}, \ldots, \alpha_n = \frac{a_n}{a_n'},$$

welche positive oder auch negative Potenzen von p sind, und hebe aus ihnen die vollständige eindeutig bestimmte Reihe $\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t, \ldots$ aller derjenigen Elemente heraus, für welche

$$(16) \qquad 1 < \alpha_r < \alpha_s < \alpha_t < \cdots,$$

d. h.

$$(16\,a) \qquad 1 < \frac{a_r}{a_r'} < \frac{a_s}{a_s'} < \cdots, \quad \text{also auch } 1 \leqq \frac{a_r}{p a_r'} < \frac{a_s}{p a_s'} < \cdots$$

ist.

Sind nun in A und B_p nach (16 a) $(a_1, \ldots, a_{r-1}) \leqq (a_1', \ldots, a_{r-1}')$, d. h. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \leqq 1$, so kann man in beiden Systemen durch Subtraktion geeigneter Vielfachen der $h_1, \ldots, h_{r-1}$ von h_n ihre Elemente $a_1', \ldots, a_{r-1}'$ zu Null machen. Es wird also in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r \ldots \\ 0 \ldots 0 \quad a_r' \ldots \end{pmatrix}, \qquad B_p \sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r \ldots \\ 0 \ldots 0 \quad p a_r' \ldots \end{pmatrix}.$$

Ist nun weiter nach unserer Annahme $\alpha_r > 1$, d. h. $a_r > a_{r'}$, also auch $a_r \geqq p a_r'$, so kann man für A (und völlig entsprechend auch für B_p) umgekehrt a_r dadurch zum Verschwinden bringen, daß man das α_r-fache von h_n von h_r abzieht. Das hiernach zu A äquivalente System

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{r-1} & & \\ & & & 0 & -\alpha_r a_{r+1}' \ldots -\alpha_r a_n' \\ & & & \vdots & \\ 0 \ldots 0 & & & a_r' & a_{r+1}' \ldots\ldots\ a_n' \end{pmatrix},$$

in welchem noch die in h_n auf a_r' folgenden Elemente durch Spaltensubtraktionen zu Null gemacht werden können, geht endlich durch die Zeilenvertauschung $(-h_r, h_n)$ in das äquivalente System

$$(17) \quad A \sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r'\, a_{r+1} \ldots a_{n-1}\, 0 \\ 0 \ldots 0 \quad 0 \quad \alpha_r a_{r+1}' \ldots \alpha_r a_n' \end{pmatrix}, \quad B_p \sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1}\, p a_r'\, a_{r+1} \ldots a_{n-1}\, 0 \\ 0 \ldots 0 \quad 0 \quad \alpha_r a_{r+1}' \ldots \quad \alpha_r a_n' \end{pmatrix},$$

über, und hier ist für A und für B_p

$$(17\,a) \qquad a_{r-1} \leqq a_r' < \begin{cases} a_{r+1} \\ \alpha_r a_{r+1}' \end{cases}, \quad \text{also auch } a_{r-1} < p a_r' \leqq \begin{cases} a_{r+1} \\ \alpha_r a_{r+1}' \end{cases};$$

denn nach unserer Annahme ist ja

$$a_{r-1} \leqq a_{r-1}' \leqq a_r' < a_r \leqq a_{r+1}, \quad a_r' \leqq a_{r+1}' < \alpha_r a_{r+1}'.$$

Da nun weiter nach unserer Annahme (16) $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{s-1}) \leqq \alpha_r$, d. h. $(a_{r+1}, \ldots, a_{s-1}) \leqq (\alpha_r a'_{r+1}, \ldots, \alpha_r a'_{s-1})$, aber $a_s > \alpha_r a'_s$, d. h. $\alpha_s > \alpha_r$ ist, so können nun genau wie vorher in h_n die Elemente $\alpha_r a'_{r+1}, \ldots, \alpha_r a'_{s-1}, \alpha_r a'_s$ zu Null gemacht und a_s durch $\alpha_r a'_s$ ersetzt werden, so daß jetzt:

$$(18)\qquad \begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1} & a'_r & a_{r+1} \ldots a_{s-1} & \alpha_r a'_s & a_{s+1} \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \alpha_s a'_{s+1} \ldots \end{pmatrix} \\ B_p &\sim \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_{r-1} & p a'_r & a_{r+1} \ldots a_{s-1} & \alpha_r a'_s & a_{s+1} \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \alpha_s a'_{s+1} \ldots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wird, und hier ist wieder genau wie vorher

$$(18\,a)\qquad a_{s-1} \leqq \alpha_r a'_s < \begin{cases} a_{s+1} \\ \alpha_s a'_{s+1} \end{cases}.$$

Durch die entsprechenden Umformungen kann man so in A und B_p die ganze untere Reihe h_n zum Verschwinden bringen und man erkennt, daß die drei Systeme A, $B_p = (p)_n A$, $B_0 = (0)_n A$ äquivalent sind den folgenden normalen Diagonalsystemen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} A &\sim (a_1 \ldots a_{r-1} \quad a'_r\, a_{r+1} \ldots a_{s-1}\, \alpha_r a'_s\, a_{s+1} \ldots \alpha_s a'_t \ldots) \\ B_p &\sim (a_1 \ldots a_{r-1}\, p\, a'_r\, a_{r+1} \ldots a_{s-1}\, \alpha_r a'_s\, a_{s+1} \ldots \alpha_s a'_t \ldots) \\ B_0 &\sim (a_1 \ldots a_{r-1} \quad a_r\, a_{r+1} \ldots a_{s-1} \quad a_s\, a_{s+1} \ldots \quad a_t \ldots) \end{aligned}$$

oder in anderer Bezeichnung der Elemente:

$$(19\,a)\qquad \begin{aligned} A &\sim (\beta_1 \ldots \beta_{r-1} \quad \beta_r \quad \beta_{r+1} \ldots \beta_{s-1} \quad \beta_s \quad \beta_{s+1} \ldots \quad \beta_t \ldots) \\ B_p &\sim (\beta_1 \ldots \beta_{r-1}\, p\, \beta_r \quad \beta_{r+1} \ldots \beta_{s-1} \quad \beta_s \quad \beta_{s+1} \ldots \quad \beta_t \ldots) \\ B_0 &\sim (\beta_1 \ldots \beta_{r-1}\, \alpha_r \beta_r \quad \beta_{r+1} \ldots \beta_{s-1}\, \frac{\alpha_s}{\alpha_r}\, \beta_s \quad \beta_{s+1} \ldots \frac{\alpha_t}{\alpha_s}\, \beta_t \ldots). \end{aligned}$$

In beiden Fällen sind also die zu B_p und B_0 äquivalenten normalen Diagonalsysteme (b_i) und $(b_i^{(0)})$ *ganze* Multipla des zu A gehörigen (β_i); es ist nämlich

$$(20)\qquad (b_i) = (g_i)(\beta_i), \quad (b_i^{(0)}) = (g_i^{(0)})(\beta_i),$$

und die beiden ganzen Multiplikatoren (g_i) und $(g_i^{(0)})$ sind:

$$(21)\qquad \begin{aligned} (g_i) &= (1, \ldots, 1, p, 1, \ldots) = (p)_r \\ (g_i^{(0)}) &= (1, \ldots, 1, \alpha_r, 1, \ldots, \frac{\alpha_s}{\alpha_r}, \ldots, \frac{\alpha_t}{\alpha_s}, \ldots) = (p)_r^{(\alpha_r)} (p)_s^{\left(\frac{\alpha_s}{\alpha_r}\right)} (p)_t^{\left(\frac{\alpha_t}{\alpha_s}\right)} \cdots (p)_v^{\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_u}\right)}. \end{aligned}$$

Sie sind also lauter Potenzen von Primfaktoren $(p)_k$, deren Exponenten $(\alpha_r), \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_r}\right), \ldots, \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_u}\right)$ die Ordnungszahlen von $\alpha_r, \frac{\alpha_s}{\alpha_r}, \ldots$ sind. Diese sind nach (16) alle endliche positive ganze Zahlen, bis auf die letzte $\left(\frac{\alpha_v}{\alpha_u}\right)$, welche stets $+\infty$ ist. Dieser letzte Faktor von $(g_i^{(0)})$ ist also $(0)_v$.

Eingegangen im Dezember 1927.

Eine Verallgemeinerung des *Rouché*schen Satzes [1]).

Von *Stephan Lipka* in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Der klassische Satz von *Rouché*, lautet wie folgt: *Im Inneren und am Rande des Einheitskreises seien zwei Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ regulär. Auf dem Rande des Kreises sei $f(z) \neq 0$ und*

$$|f(z)| > |g(z)|. \tag{1}$$

Dann haben $f(z)$ und $f(z) + g(z)$ gleichviele Nullstellen im Inneren des Einheitskreises.

Ich werde statt der Bedingung (1), die allgemeinere

$$|f(z)| \geqq |g(z)|, \quad |z| = 1 \tag{1'}$$

setzen und die Gültigkeit des Satzes in diesem Falle prüfen. Wie man an einem einfachen Beispiel erkennt [2]), ist der Satz in diesem Falle nicht mehr gültig. Ich möchte zunächst die folgende Bemerkung von Herrn *Fejér* erwähnen: Der Satz von *Rouché* behält seine Gültigkeit auch noch im Falle (1'), wenn $f(z) + g(z)$ auf dem Rande nicht verschwindet. Man sieht dies unmittelbar ein, wenn man die Darstellung

$$f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

betrachtet. Die Änderung des Arcus von $\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$ längs des Randes des Kreisbildes, wird sicher Null, wenn nur $\frac{g(z)}{f(z)}$ immer von -1 verschieden ist, was eben unsere Annahme ist.

Ich werde im folgenden in einem allgemeinen Falle die notwendige und hinreichende Bedingung dafür entwickeln, daß der Satz von *Rouché* für (1') richtig bleibe, wenn zugelassen wird, daß auf dem Rande des Einheitskreises Nullstellen von $f(z) + g(z)$ liegen.

Es sei $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$; da $f(z)$ auf dem Rande nicht verschwindet, wird $F(z)$ regulär für jede Stelle ζ des Randes für welche $f(\zeta) + g(\zeta) = 0$ gilt. Wir betrachten jetzt für jede solche Stelle ζ die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial |F(z)|}{\partial x}\right)_{z=\zeta}, \quad \left(\frac{\partial |F(z)|}{\partial y}\right)_{z=\zeta}$$

von denen wir annehmen, daß nicht beide gleichzeitig verschwinden. Unsere Bedingungen lauten also folgendermaßen:

---

[1]) *E. Rouché*, Journ. de l'Éc. Pol. Bd. 39, S. 217, 1862.

[2]) Es sei z. B. $f(z) = z^2(z+2)$, $g(z) = z$. Die Funktion $f(z)$ hat die zweifache Nullstelle $z = 0$ im Inneren des Einheitskreises, dagegen besitzt $f(z) + g(z)$ nur eine einfache Nullstelle $z = 0$.

1. *Seien $f(z)$ und $g(z)$ im Inneren und am Rande des Einheitskreises regulär. Auf dem Rande des Kreises sei $f(z) \neq 0$ und*

$$|f(z)| \geqq |g(z)|, \quad |z| = 1 .$$

2. *Wenn wir $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ setzen, soll für jede auf der Peripherie liegende Nullstelle $z = \zeta$ von $f(z) + g(z)$ wenigstens eine der Ableitungen*

$$\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x}, \quad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y}$$

von Null verschieden sein.

3. *Wenn $z = \zeta$ irgendeine auf der Peripherie liegende Nullstelle von $f(z) + g(z)$ ist, so soll die Gerade*

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} x + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} y = 0$$

mit dem Vektor ζ einen rechten Winkel bilden, und der Punkt ζ soll auf der „negativen" Seite der Geraden liegen.

Unter diesen Bedingungen haben $f(z)$ und $f(z) + g(z)$ gleichviele Nullstellen im Innern des Einheitskreises.

Wir schreiben die Bedingung 3. in der folgenden Form

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} J(\zeta) - \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} R(\zeta) = 0$$

$$\text{(2')} \qquad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} R(\zeta) + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} J(\zeta) < 0 .$$

I.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Bedingungen (2) und (2') notwendig sind. Es sei $\zeta = a + ib$ ein Punkt des Randes, für welchen $f(\zeta) + g(\zeta) = 0$ ist; wir wollen die Punkte der Umgebung von ζ durch die Formel darstellen:

$$\text{(3)} \qquad x = a + r\cos\varphi, \; y = b + r\sin\varphi \qquad (r > 0) .$$

Wir nehmen erstens an, daß die Relation (2) nicht gälte, und zeigen, daß in diesem Falle $f(z) + g(z)$ im Innern des Einheitskreises weniger Nullstellen besitzt als $f(z)$. Es sei also

$$\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} J(\zeta) - \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} R(\zeta) \neq 0 .$$

Dies bedeutet, daß der vom Vektor ζ mit der Geraden (G) gebildete Winkel kein rechter Winkel ist. Man sieht leicht ein, daß es in diesem Falle einen Punkt $(\cos\varphi^*, \sin\varphi^*)$ am Rande des Einheitskreises gibt, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

Der Punkt $\zeta + re^{i\varphi^*}$ liegt im Innern des Einheitskreises, wenn $r > 0$ genügend klein ist.

Der Punkt $e^{i\varphi^*}$ liegt auf der „negativen" Seite der Geraden (G), d. h.

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} \cos\varphi^* + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} \sin\varphi^* < 0$$

ist. Wir schreiben nun nach (3)

$$\frac{d |F(\zeta)|}{dr} = \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} \sin\varphi$$

und setzen $\varphi = \varphi^*$; dann wird nach (4)

$$\frac{d\,|F(\zeta)|}{dr} < 0.$$

Die letztere Relation bedeutet aber, daß $|F(z)|$ abnimmt, wenn z vom Punkte ζ längs einer Geraden ins Innere des Kreises rückt. Aber es ist $|F(\zeta)| = 1$, also wird

$$|F(z)| < 1, \qquad z = \zeta + r e^{i\varphi^*}, \tag{5}$$

wenn nur r eine genügend kleine positive Zahl bedeutet. Jetzt beschreiben wir dem Einheitskreise einen konzentrischen Kreis vom Radius ϱ ein, welcher sämtliche im Inneren des Einheitskreises liegenden Nullstellen von $f(z) + g(z)$ enthält. Es sei $\xi = \zeta + r e^{i\varphi^*}$ ein Punkt im Inneren des Einheitskreises, welcher im Äußeren des Kreises vom Radius ϱ und sehr nahe bei ζ liegt. Nun bilde man die Funktion

$$h(z) = f(z) - F(\xi)\, g(z);$$

diese besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktionen $h(z)$ und $f(z) + g(z)$ haben gleichviele Nullstellen im Inneren des Kreises vom Radius ϱ. Es ist nämlich

$$|h(z) - (f(z) + g(z))| = |F(\xi) + 1|\,|g(z)| < \varepsilon,$$

wenn $|z| = \varrho$ ist, und ξ genügend nahe bei ζ liegt, da $F(\zeta) = -1$ gilt. Aber $f(z) + g(z)$ verschwindet nicht am Rande des Kreises vom Radius ϱ, also wird

$$|h(z) - (f(z) + g(z))| < |f(z) + g(z)|, \qquad |z| = \varrho,$$

und der Satz von *Rouché* ergibt, daß $h(z)$ und $f(z) + g(z)$ im Inneren des Kreises vom Radius ϱ gleichviele Nullstellen haben.

b) Die Funktion $h(z)$ besitzt weniger Nullstellen im Kreise vom Radius ϱ, als $f(z)$ im Einheitskreise. Die Relation (5) ergibt $|F(\xi)| < 1$, woraus die Ungleichung

$$|F(\xi)|\,|g(z)| < |f(z)|$$

folgt, für jedes z vom absoluten Betrag 1; also haben $f(z)$ und $h(z)$ gleichviele Nullstellen im Innern des Einheitskreises, nach dem Satz von *Rouché*. Aber $h(z)$ hat die Nullstelle ξ im Äußeren des Kreises vom Radius ϱ, und so folgt, daß $h(z)$ weniger Nullstellen besitzt im Kreis vom Radius ϱ als $f(z)$ im Einheitskreise.

Da der Kreis vom Radius ϱ sämtliche im Inneren des Einheitskreises liegenden Nullstellen von $f(z) + g(z)$ enthält, folgt nach a) und b), daß $f(z) + g(z)$ im Einheitskreise weniger Nullstellen besitzt als $f(z)$; daraus ergibt sich, daß die Bedingung (2) notwendig ist.

Wenn aber die Bedingung (2) erfüllt wäre und (2′) nicht, so bedeutet dies, da die Ableitungen

$$\frac{\partial\,|F(\zeta)|}{\partial x}, \quad \frac{\partial\,|F(\zeta)|}{\partial y}$$

nicht beide verschwinden und $\zeta \neq 0$ ist, daß die Ungleichung

$$\frac{\partial\,|F(\zeta)|}{\partial x} R(\zeta) + \frac{\partial\,|F(\zeta)|}{\partial y} J(\zeta) > 0$$

gilt. Der Punkt ζ liegt also auf der positiven Seite der Geraden (G), und also wird die Relation (5) von jedem Punkt $e^{i\varphi^*}$ befriedigt, welcher auf der negativen Seite der Geraden (G) liegt. Man könnte dann die vorige Überlegung wörtlich wiederholen und das Resultat gewinnen, daß $f(z) + g(z)$ weniger Nullstellen besitzt als $f(z)$. *Die Bedingung* (2′) *ist also ebenfalls notwendig.*

II.

Ich werde jetzt beweisen, daß die Bedingungen (2) und (2′) hinreichend sind. Nehmen wir an, daß diese Bedingungen an jeder Stelle ζ, für welche $|\zeta| = 1$ und $f(\zeta) + g(\zeta) = 0$ gilt, erfüllt sind. Ich will zunächst bemerken, daß das durch die Funktion $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ vermittelte Bild der Umgebung von ζ schlicht ist. Wäre nämlich

$$F'(\zeta) = \frac{\partial R(F(\zeta))}{\partial x} + i \frac{\partial J(F(\zeta))}{\partial x} = 0,$$

so folgt mittels der Gleichungen

$$\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} = \frac{1}{|F(\zeta)|}\left\{R(F(\zeta)) \frac{\partial R(F(\zeta))}{\partial x} + J(F(\zeta)) \frac{\partial J(F(\zeta))}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} = \frac{1}{|F(\zeta)|}\left\{R(F(\zeta)) \frac{\partial R(F(\zeta))}{\partial y} + J(F(\zeta)) \frac{\partial J(F(\zeta))}{\partial y}\right\}$$

und nach den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen, daß die Gleichungen

$$\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} = 0$$

bestehen, was unseren Voraussetzungen offenbar nicht entspricht.

Wir schlagen jetzt um den Punkt ζ einen Kreis von genügend kleinem Radius ϱ, welcher von $F(z)$ schlicht abgebildet wird. Dieser Kreis schneide den Rand des Einheitskreises in den Punkten A, B. Das Kreisbogenzweieck ABA, welches im Innern des Einheitskreises liegt, sei mit τ und sein Bild mit τ' bezeichnet. Es wird gezeigt, daß τ' im Äußern des offenen Einheitskreises liegt. P und Q sollen zwei Punkte auf dem im Innern des Einheitskreises liegenden Bogen des Kreises vom Radius ϱ bedeuten. Man gewinnt alle Punkte

$$z = \zeta + \varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

des Bogens PQ, wenn φ sich in einem Intervalle ändert, welches kleiner als π ist. Dem Bogen PQ entspricht durch die Funktion $F(z)$ das Bild $P'Q'$. Wir schätzen die Abstände der Punkte dieses Kurvenstückes $P'Q'$ vom Nullpunkte ab. Es wird

$$|F(z)| = |F(\zeta)| + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x}\,\varrho\cos\varphi + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y}\,\varrho\sin\varphi + \varepsilon'\,\varrho\cos\varphi + \varepsilon''\,\varrho\sin\varphi,$$

wo ε' und ε'' genügend kleine Werte haben, wenn nur ϱ genügend klein ist, und da noch $F(\zeta) = -1$, so ergibt sich

$$(6) \quad |F(\zeta)| = 1 + \varrho\left\{\frac{\partial |F(\xi)|}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y}\sin\varphi + \varepsilon'\cos\varphi + \varepsilon''\sin\varphi\right\}.$$

Nach (2) bildet die Gerade (G) mit dem Vektor ζ einen rechten Winkel; wenn also z auf dem Bogen PQ variiert, so ändert sich φ in einem solchen Intervalle, welches auf der einen Seite der Geraden (G) liegt, und zwar nach (2′) auf der positiven Seite. Infolgedessen existiert eine positive Zahl p, die von ϱ unabhängig ist, und für welche die Ungleichung

$$0 < p < \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y}\sin\varphi$$

gilt, wenn φ im genannten Intervalle variiert. Nach (6) folgt hieraus für genügend kleines ϱ die Ungleichung

$$|F(z)| > 1,$$

wenn $F(z)$ einen Punkt des Kurvenstückes $P'Q'$ bedeutet. Aber es liegen auch die weiteren Kurvenstücke, die den Bereich τ' begrenzen, und zwar die Stücke $(-1, A')$, $(-1, B')$, (A', P'), (B', Q') im Äußeren des offenen Einheitskreises. Betreffend die Stücke $(-1, A')$, $(-1, B')$ folgt dies aus der Bedingung

$$|F(z)| \geqq 1, \qquad |z| = 1,$$

und betreffend (A', P'), (B', Q') aus der Bemerkung, daß das durch die Funktion $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ vermittelte Bild der Umgebung schlicht ist. Wenn nämlich $A'P'$ einen Punkt im Inneren des Einheitskreises besitzt, so schneidet $A'P'$ einen einfachen Bogen der Kurve

$$F(z), \ |z| = 1,$$

da P' im Äußeren des Einheitskreises liegt, und für $|z| = 1$ $|F(z)| \geqq 1$ ist. Jetzt ordnen wir zu jedem Punkt ζ des Randes, welcher Nullstelle der Funktion $f(z) + g(z)$ ist, einen Bereich τ nach der vorigen Art zu. Wir bezeichnen mit e' den Bereich, welcher aus dem Einheitskreise durch Fortlassung der Bereiche τ entsteht. Die Bereiche τ sind genügend klein, so daß $f(z) + g(z)$ am Rande von e' keine Nullstellen besitzt. e' enthält ferner in seinem Inneren sämtliche Nullstellen von $f(z) + g(z)$, welche im Inneren des Einheitskreises liegen. Nun bezeichne ϑ eine Zahl, die sich von -1 um wenig unterscheidet und für welche $|\vartheta| < 1$ ist; dann gilt:

α) $f(z) + g(z)$ und $f(z) - \vartheta g(z)$ haben im Inneren von e' gleichviele Nullstellen, da $f(z) + g(z)$ am Rande von e' nicht verschwindet (s. Abschnitt I, a).

β) $f(z) - \vartheta g(z)$ besitzt ebensoviele Nullstellen im Inneren von e' als im Inneren des Einheitskreises. Im entgegengesetzten Fall würde nämlich $f(z) - \vartheta g(z)$ in einem der Bereiche τ eine Nullstelle ξ haben, also wäre

$$|F(\xi)| = \left|\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\right| = |\vartheta| < 1,$$

was offenbar unmöglich ist, weil $F(z)$ den Bereich τ auf das Äußere des offenen Einheitskreises abbildet.

γ) $f(z)$ und $f(z) - \vartheta g(z)$ haben im Inneren des Einheitskreises gleichviele Nullstellen (nach *Rouché*).

Es folgt nach α), β), γ), da noch e' alle Nullstellen von $f(z) + g(z)$ enthält, daß $f(z)$ und $f(z) + g(z)$ im Inneren des Einheitskreises gleichviele Nullstellen haben. *Somit erweisen sich die Bedingungen* (2) *und* (2′) *als hinreichend.*

III.

Wir werden einige Anwendungen unseres Satzes geben.

1. *Es sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

eine Potenzreihe mit lauter reellen Koeffizienten. $f(z)$ konvergiere in einem Kreis, der größer ist als der Einheitskreis. Am Rande des Einheitskreises sei immer

$$|f(e^{i\varphi})| \geqq 1, \tag{7}$$

ferner

$$f(e^{i\varphi}) \neq -1$$

bis auf die Stelle $e^{i\varphi} = 1$, *wo*

$$f(1) = -1, \tag{8}$$

$$f'(1) > 0 \tag{9}$$

gelten soll. Dann nimmt die Funktion $f(z)$ *die Werte* 0 *und* -1 *im Inneren des Einheitskreises gleich oft an.*

Beweis. Die Behauptung ist gleichbedeutend damit, daß die Funktionen $f^2(z)$ und $f(z)(f(z)+1)$ im Inneren des Einheitskreises gleichviele Nullstellen haben. Nach (7) ist

$$|f^2(z)| \geqq |f(z)|, \qquad |z| = 1,$$

und so, weil die Funktion

$$f^2(z) + f(z) = f(z)\,(f(z)+1)$$

für $\zeta = 1$ nach (8) verschwindet, wird unsere Behauptung bewiesen sein, sobald wir nachweisen können, daß die Bedingungen (2) und (2′) bestehen. Nun ist aber

$$F(z) = \frac{f^2(z)}{f(z)} = f(z)$$

und mit Rücksicht darauf, daß die Koeffizienten von $f(z)$ reell sind, gewinnen wir für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial\,|f(z)|}{\partial x} = \frac{1}{2\,|f(z)|}\left\{f'(z)\,f(\bar{z}) + f'(\bar{z})\,f(z)\right\}$$

$$\frac{\partial\,|f(z)|}{\partial y} = \frac{i}{2\,|f(z)|}\left\{f'(z)\,f(\bar{z}) - f'(\bar{z})\,f(z)\right\};$$

ζ ist 1, und so ergibt sich für (2)

$$J(\zeta)\frac{\partial\,|f(\zeta)|}{\partial x} - R(\zeta)\frac{\partial\,|f(\zeta)|}{\partial y} = 0$$

und nach (8) und (9) für (2′)

$$R(\zeta)\frac{\partial\,|f(\zeta)|}{\partial x} + J(\zeta)\frac{\partial\,|f(\zeta)|}{\partial y} = -f'(1) < 0.$$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

2. Von Herrn *G. Julia* rührt der folgende Satz her[1]: Eine Abbildung, welche den abgeschlossenen Einheitskreis in einen ganz im Inneren des Einheitskreises gelegenen (nicht notwendig einfach bedeckten) Bereich überführt, hat genau einen Fixpunkt. D. h. wenn $f(z)$ im Einheitskreis $|z| \leqq 1$ regulär ist und daselbst $|f(z)| < 1$ gilt, dann hat die Gleichung $f(z) - z = 0$ genau eine Wurzel im Inneren des Einheitskreises.

Dieser Satz hört auf richtig zu sein, wenn die Bedingung $|f(z)| < 1$ durch die allgemeinere $|f(z)| \leqq 1$ ersetzt wird, d. h. wenn man zuläßt, daß der Rand des Einheitskreises und der des Bildbereiches gemeinsame Punkte besitzen. Betrachten wir z. B. die Funktion $f(z) = \frac{2}{3-z}$; die durch diese Funktion vermittelte Abbildung hat die Fixpunkte 1, 2, besitzt also keinen Fixpunkt im Inneren des Einheitskreises. Wir werden den *Julia*schen Satz im Falle von Potenzreihen mit lauter reellen Koeffizienten verallgemeinern. *Es sei* $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ *eine Potenzreihe mit nur reellen Koeffizienten. Diese soll den Einheitskreis in sich abbilden auf solche Weise, daß jeder Punkt*

[1]) *G. Julia*, Journ. de Math. Serie 8, Bd. 1, S. 63, 1918. *Pólya-Szegö*, Aufgaben, Bd. I, S. 123.

des Kreises in einen inneren Punkt übergeführt wird, abgesehen von dem Punkte $z = 1$, der in sich selbst übergehen soll; es sei also $f(1) = 1$. Ich behaupte, daß diese Abbildung im Falle $f'(1) \neq 0$ dann und nur dann einen Fixpunkt besitzt, wenn

$$f'(1) > 1 \tag{10}$$

ist.

Beweis. Für jeden Wert z am Rande des Einheitskreises gilt die Beziehung

$$|z| \geqq |f(z)|;$$

also wird die Funktion $z - f(z)$ dann und nur dann eine Nullstelle im Inneren des Einheitskreises haben, wenn die Bedingungen (2) und (2′) gelten. Dabei ist $F(z) = \dfrac{z}{-f(z)}$ zu setzen; die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial x} = \frac{1}{|f(z)|^2}\left\{|f(z)|\frac{x}{|z|} - \frac{|z|}{2|f(z)|}\left(f'(z)\,f(\bar{z}) + f'(\bar{z})\,f(z)\right)\right\}$$

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial y} = \frac{1}{|f(z)|^2}\left\{|f(z)|\frac{y}{|z|} - \frac{i|z|}{2|f(z)|}\left(f'(z)\,f(\bar{z}) - f'(\bar{z})\,f(z)\right\};\right.$$

nach diesen Ausdrücken ergibt sich für (2′)

$$J(\zeta)\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} - R(\zeta)\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} = 0, \quad \zeta = 1$$

und für (2′)

$$R(\zeta)\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} + J(\zeta)\frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial y} = \frac{\partial |F(\zeta)|}{\partial x} = 1 - f'(1).$$

Nach (10) gilt also auch die Bedingung (2′).

3. Endlich betrachten wir die algebraische Gleichung

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\nu-1} z^{\nu-1} - a_\nu z^\nu + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \cdots + a_n z^n = 0,$$

worin *die Koeffizienten reelle Zahlen sind und der Bedingung*

$$a_k > 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

genügen. Setzen wir voraus, daß die Funktion $f(z)$ am Rande des Einheitskreises nicht verschwindet, bis auf den Punkt $z = 1$, welcher eine einfache Wurzel von $f(z) = 0$ sei. Ich behaupte, daß die Gleichung dann und nur dann ν Wurzeln im Inneren des Einheitskreises hat, wenn

$$f'(1) > 0$$

ist.

Beweis. Man bezeichne $f(z) = -a_\nu z^\nu + p(z)$,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + a_{\nu+1} z^{\nu+1} + \cdots + a_n z^n.$$

Da $f(1) = 0$ ist, besteht am Rande des Einheitskreises

$$|a_\nu z^\nu| \geqq |p(z)|, \qquad |z| = 1,$$

außerdem sind die Bedingungen (2) und (2′) erfüllt. Die partiellen Ableitungen von $|F(z)| = \left|\dfrac{-a_\nu z^\nu}{p(z)}\right|$ sind nämlich

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial x} = \frac{1}{|p(z)|^2}\left\{|a_\nu|\ \nu x\,|z|^{\nu-2}\,|p(z)| - \frac{|a_\nu|\,|z|^\nu}{2|p(z)|}\left(p'(z)\,p(\bar{z}) + p'(\bar{z})\,p(z)\right)\right\}$$

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial y} = \frac{1}{|p(z)|^2}\left\{|a_\nu|\ \nu y\,|z|^{\nu-2}\,|p(z)| - \frac{i|a_\nu||z|^\nu}{2|p(z)|}\left(p'(z)\,p(\bar{z}) - p'(\bar{z})p\,(z)\right)\right\},$$

und nach diesen Ausdrücken folgt für (2)

$$J(\zeta)\frac{\partial|F(\zeta)|}{\partial x}-R(\zeta)\frac{\partial|F(\zeta)|}{\partial y}=0,\qquad \zeta=1,$$

ferner für (2′)

$$\frac{a_\nu}{p^2(1)}(\nu p(1)-p'(1))<0,$$

da $p(1)=a_\nu>0$, $f'(1)>0$ gilt.

Szeged, den 12. Dezember 1927.

Eingegangen 15. Dezember 1927.

Über eine Fläche, auf der die Asymptotenlinien ein Gewebe bilden.

Von *Werner Pallas* in Dresden.

Inhaltsangabe.

Kap. I. Einleitung.
§ 1. Anknüpfung an eine Arbeit von *H. Jonas*.
§ 2. Beweisführung für den Fall des geraden Konoids.
Kap. II. Analytische Behandlung der Aufgabe.
§ 3. Verbiegung des hyperbolischen Paraboloids als Translationsfläche.
§ 4. Einführung eines Systems geodätischer Normalkoordinaten.
§ 5. Parameterdarstellung der Evolventenfläche.
§ 6. Gleichung der Krümmungslinien der ersten Schar.
§ 7. Gleichung der Haupttangentenkurven.
§ 8. Das Gewebe. Krümmungslinien der zweiten Schar.
§ 9. Das Linienelement der Evolventenfläche.
§ 10. Das Krümmungsmaß der Evolventenfläche.
Kap. III. Geometrische Betrachtungen.
§ 11. Realitätsverhältnisse. Periode.
§ 12. Gestalt der Parameterkurven.
§ 13. Gestalt der Krümmungslinien der ersten Schar.
§ 14. Die Biegungslinie der Konoidachse.
§ 15. Weitere Symmetrieelemente.
§ 16. Allgemeine Zusammenfassung.

Kapitel I.

Einleitung.

§ 1. Anknüpfung an eine Arbeit von *H. Jonas*.

Im ersten Kapitel einer Abhandlung: „*Untersuchung über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen*“ spricht *Hans Jonas* [1]) über „*spezielle Gewebe, die im Zusammenhang mit den Biegungsflächen der Linienflächen auftreten*“.

Er setzt zunächst eine Fläche voraus, deren Asymptotenlinien ein Gewebe [2]) bilden, und betrachtet den Evolutenmantel, der zu den Krümmungslinien der ersten Schar gehört. Diese Krümmungslinien der ersten Schar sind bei Flächen mit asymptotischem Gewebe dadurch ausgezeichnet, daß sie zugleich Kurven konstanten *Gauß*schen Krümmungsmaßes sind, ein Satz, der übrigens schon vor *Jonas* von *R. Rothe* [3]) ausgesprochen worden ist. Dieser Evolutenmantel läßt sich, wie *Jonas* zeigt, auf ein gerades Konoid abwickeln.

[1]) Math. Annalen, Band 87, Heft 3/4, S. 157 bezw. 162.

[2]) Gewebe = Kurvennetz ohne Umwege, vgl. § 2.

[3]) *R. Rothe*, Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz. Berl. Math. Ges. Bericht 5 (1906), S. 9.

Hierauf wird der umgekehrte Weg beschritten: Vorgelegt ist eine beliebige Fläche, von der allein gesagt ist, daß sie auf eine Schar geodätischer Linien und ihre orthogonalen Trajektorien bezogen ist. Es werden die drei Fundamentalformen, nämlich:

$$ds^2 = \Sigma x_u^2; \quad -\Sigma x_u X_u; \quad ds'^2 = \Sigma X_u^2$$

für diejenige Evolventenfläche aufgestellt, die durch folgende Beziehung definiert ist: Nennt man die geodätischen Normalkoordinaten r und φ, so wird die Evolventenfläche durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = x - r x_r; \quad \mathfrak{y} = y - r y_r; \quad \mathfrak{z} = z - r z_r,$$

d. h. aus dem System der ∞^1 Orthogonalflächen, die zu der von den Tangenten der geodätischen Linien $\varphi = c$ gebildeten Normalenkongruenz gehören, ist eine einzelne herausgegriffen, wobei die additive Konstante gleich Null gesetzt ist.

Untersucht man, wie die Fläche $(x\,y\,z)$ beschaffen sein muß, wenn $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$ ein Gewebe enthalten soll, dann erhält man mit *Jonas* folgenden Satz:

„*Den Asymptotenlinien einer auf eine Regelfläche abwickelbaren Fläche entsprechen die Kurven eines Gewebes auf den durch die Biegungslinien der Erzeugenden definierten Evolventenflächen*“ [1]).

Soll nun insbesondere das Gewebe ebenfalls asymptotisch sein, dann spezialisiert sich die als Ausgangsfläche genommene Regelfläche zu einem geraden Konoid, d. h. also zu einer Regelfläche, deren Erzeugende alle die Achse $(r = 0)$ senkrecht schneiden.

Jonas kleidet diesen Satz in folgende Worte:

„*Wird von den Biegungslinien der Erzeugenden einer durch isometrische Deformation aus einem geraden Konoid hervorgegangenen Fläche ein System unausdehnbarer, bis zur Biegungslinie der Achse reichender Fäden abgewickelt, so beschreiben dabei die Endpunkte der Fäden eine ausgezeichnete Evolventenfläche, deren Asymptotenlinien stets den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechen und überdies ein Gewebe bilden.*“

§ 2. Beweis für den Fall des geraden Konoids.

Die Beweisführung, die *Jonas* in seiner Abhandlung gibt, sei hier für den Fall des geraden Konoids — der uns ja allein interessiert — kurz skizziert [2]).

Das gerade Konoid sei bezogen auf die Erzeugenden als geodätische Linien $(\varphi = c)$ und ihre orthogonalen Trajektorien $(r = c)$.

Dann kann das Linienelement in folgender Form geschrieben werden:

$$(2) \qquad ds^2 = dr^2 + (r^2 + \Phi(\varphi))\, d\varphi^2.$$

Dabei ist Φ eine willkürliche Funktion von φ allein, die für die Fläche charakteristisch ist. Wir betrachten nun eine Biegungsfläche dieses Typus (2), bezeichnen ihre laufenden Koordinaten mit x, y, z, die Cosinus der Normalenrichtung mit X, Y, Z und die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung mit D, D', D''. Dann berechnet sich nach den Ableitungsformeln von *Gauß*:

$$x_{rr} = DX; \quad \text{entsprechend } y_{rr} = DY; \quad z_{rr} = DZ$$

$$x_{r\varphi} = \frac{r}{r^2 + \Phi(\varphi)}\, x_\varphi + D'X; \qquad y_{r\varphi} \ldots; \; z_{r\varphi} \ldots$$

$$x_{\varphi\varphi} = r x_r + \frac{\Phi'(\varphi)}{2(r^2 + \Phi)}\, x_\varphi + D''X; \quad y_{\varphi\varphi} \ldots; \; z_{\varphi\varphi} \ldots$$

---

[1]) Auf die Beziehung zur Bildkugel wurde hierbei verzichtet.

[2]) Unter Änderung der Bezeichnung.

Für das Linienelement in der *Gauß*schen Form (2) berechnet sich das Krümmungsmaß nach der Formel:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2},$$

für $G = r^2 + \Phi(\varphi)$ also:

$$K = \frac{-\Phi(\varphi)}{(r^2 + \Phi(\varphi))^2}.$$

Das ergibt zugleich eine für das Folgende wichtige Beziehung

$$DD'' - D'^2 = KG = -\frac{\Phi(\varphi)}{r^2 + \Phi(\varphi)},$$

also:

$$\boxed{D'^2 = DD'' + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2 + \Phi(\varphi)}}. \tag{3}$$

Wir setzen nun eine Evolventenfläche mit folgender Parameterdarstellung an (vgl. Fig. 1.):

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x - r x_r \ ^1) \\ \mathfrak{y} &= y - r y_r \\ \mathfrak{z} &= z - r z_r . \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Differentiieren ergibt sich:

$$\mathfrak{x}_r = -rDX; \qquad \mathfrak{y}_r \ldots .; \ \mathfrak{z}_r \ldots .$$

$$\mathfrak{x}_\varphi = x_\varphi \frac{\Phi}{r^2 + \Phi} - rD'X; \quad \mathfrak{y}_\varphi \ldots .; \ \mathfrak{z}_\varphi \ldots .$$

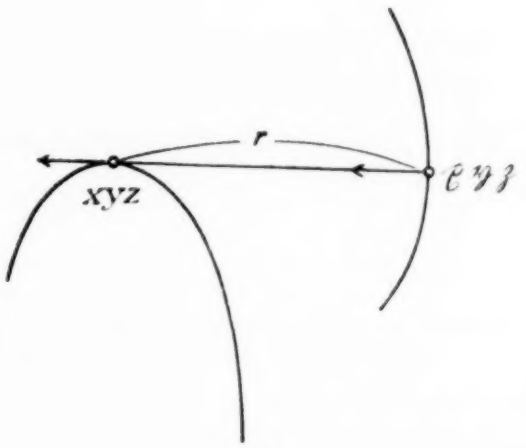

Fig. 1.

Daraus folgen die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die Evolventenfläche:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= r^2 D^2 \\ \mathfrak{F} &= r^2 DD' \\ \mathfrak{G} &= \Phi - r^2 + \frac{r^4}{r^2 + \Phi} + r^2 D'^2 \end{aligned}$$

und unter Benutzung der Beziehung (3):

$$\mathfrak{G} = r^2 DD'' + \Phi.$$

Das Linienelement der Evolventenfläche hat also dann folgende Form:

$$d\mathfrak{s}^2 = r^2 D(D\,dr^2 + 2D'\,dr\,d\varphi + D''\,d\varphi^2) + \Phi\,d\varphi^2$$

oder:

$$\boxed{d\mathfrak{s}^2 = r^2 D\,II + \Phi\,d\varphi^2}. \tag{4}$$

Führt man in (4) die Parameter α, β der Haupttangenkurven der Evolutenfläche $(x\ y\ z)$ ein, so reduziert sich die Fundamentalform II auf

$$II = 2D' d\alpha\, d\beta$$

und liefert in (4) nur einen Beitrag zu dem Gliede mit $d\alpha\, d\beta$.

Wir können dann das Linienelement in der Form schreiben:

$$d\mathfrak{s}^2 = R\,d\alpha\,d\beta + \Phi(\varphi_\alpha d\alpha + \varphi_\beta d\beta)^2. \tag{5}$$

---

[1]) Es soll alles, was mit der Evolventenfläche zusammenhängt, durch deutsche Buchstaben bezeichnet werden.

Die Bedingung für ein aus den Parameterlinien gebildetes Gewebe lautet:

$$(\sqrt{E})_\beta = (\sqrt{G})_\alpha . \tag{6}$$

Dabei ist $(\sqrt{E})_\beta$ abkürzungsweise für $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\beta}$ und entsprechend $(\sqrt{G})_\alpha$ für $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha}$ gesetzt.

Unter einem Gewebe versteht man ein Kurvennetz ohne Umwege.

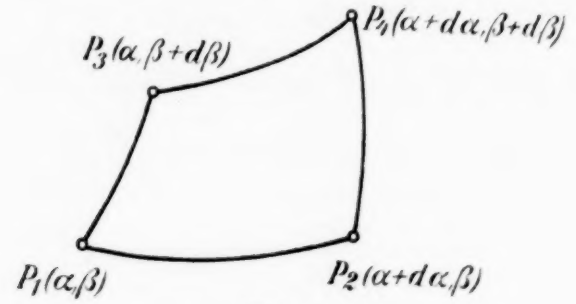

Fig. 2.

Es soll in Fig. 2 der Weg von P_1 nach P_4 über P_2 gleich dem von P_1 nach P_4 über P_3 sein.

Also:

$$\sqrt{E(\alpha\beta)}\,d\alpha + \sqrt{G(\alpha+d\alpha,\beta)}\,d\beta = \sqrt{G(\alpha,\beta)}\,d\beta + \sqrt{E(\alpha,\beta+d\beta)}\,d\alpha .$$

Daraus folgt leicht die Bedingung dafür, daß die Parameterkurven ein Gewebe bilden, in der Form

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\beta} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha} \tag{6 a}$$

oder, wie oben abgekürzt:

$$(\sqrt{E})_\beta = (\sqrt{G})_\alpha . \tag{6}$$

Das ergibt hier:

$$(\sqrt{\Phi})_\beta\,\varphi_\alpha = (\sqrt{\Phi})_\alpha\,\varphi_\beta .$$

Das heißt aber: Φ muß eine Funktion von φ allein sein, was ja auch von Anfang an vorausgesetzt wurde.

Damit ist nun gezeigt, daß die durch (1) definierte Fläche ein von dem α, β-Netz gebildetes Gewebe enthält, das den Asymptotenlinien der Evolutenfläche entspricht.

Um die zweite Fundamentalform zu berechnen, müssen wir beachten, daß die Tangente an die Biegungsfläche zugleich Normale für die Evolventenfläche ist (vgl. Fig. 1):

$$\mathfrak{x} = x_r; \quad \mathfrak{y} = y_r; \quad \mathfrak{z} = z_r .$$

Die Ableitungen der Normalen berechnen sich dann wie folgt:

$$\mathfrak{x}_r = x_{rr} = DX; \qquad \mathfrak{y}_r \ldots .; \ \mathfrak{z}_r \ldots .$$

$$\mathfrak{x}_\varphi = x_{r\varphi} = \frac{r}{r^2+\Phi}\,x_\varphi + D'X; \qquad \mathfrak{y}_\varphi \ldots .; \ \mathfrak{z}_\varphi \ldots .$$

und die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform nehmen folgende Form an:

$$\mathfrak{D} = rD^2$$

$$\mathfrak{D}' = rDD'$$

$$\mathfrak{D}'' = \frac{-r\Phi}{r^2+\Phi} + rD'^2$$

oder mit Benutzung von (3)

$$\mathfrak{D}'' = rDD''.$$

Also wird die zweite Fundamentalform folgender Ausdruck:

$$-\Sigma \mathfrak{x}_r \mathfrak{X}_r = rD(D\,dr^2 + 2\,D'\,dr\,d\varphi + D''\,d\varphi^2)$$

oder:

(7) $$\boxed{-\Sigma \mathfrak{x}_r \mathfrak{X}_r = r\,D\,II}\,.$$

Die zweite Fundamentalform der Evolventenfläche ist also derjenigen der Evolutenfläche proportional, d. h. die Haupttangentenkurven auf beiden Flächen entsprechen einander.

Damit ist der am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

Das Ziel dieser Untersuchung ist nun folgendes:

Es soll, ausgehend von einer bekannten Biegungsfläche eines geraden Konoids, eine Fläche bestimmt werden, auf der die Asymptotenlinien ein Gewebe bilden.

Die Untersuchung geht aus vom gleichseitigen, hyperbolischen Paraboloid, das als Translationsfläche verbogen wird [1]).

Es handelt sich dabei um zwei Aufgaben: einmal die nötigen Formeln zusammenzustellen, d. h. die Fläche analytisch zu beschreiben, zum andern aber darum, ein Bild zu gewinnen von dem geometrischen Bau der Fläche und ihre Zusammenhangsverhältnisse zu überschauen.

Kapitel II.

Analytische Behandlung der Aufgabe.

§ 3. Verbiegung des hyperbolischen Paraboloids als Translationsfläche.

Wir stellen das gleichseitige hyperbolische Paraboloid in seiner einfachsten Form auf, verändern also die Zählung in der z-Richtung so, daß die etwa auftretende Flächenkonstante gleich eins wird:

$$x^2 - y^2 = z$$

oder in Parameterdarstellung:

(8) $$x_0 = u;\ y_0 = v;\ z_0 = u^2 - v^2.$$

Man sieht sofort, daß die Fläche eine Translationsfläche ist: Sie entsteht durch Verschieben der beiden Kurven:

(8 a) $$\text{a)}\ \left.\begin{matrix} x_0 = u \\ z_0' = u^2 \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \text{b)}\ \left.\begin{matrix} y_0 = v \\ z_0'' = -v^2 \end{matrix}\right\}$$

aneinander. Denn die Kurven $v = c$ (a) sind vom Parameter v und die Kurven $u = c$ (b) vom Parameter u unabhängig, also je untereinander kongruent.

Man erkennt leicht die Berechtigung, das gleichseitige hyperbolische Paraboloid als gerades Konoid aufzufassen.

Setzt man

$$x_0 + y_0 = \xi,\quad x_0 - y_0 = \eta,\quad z_0 = \zeta,$$

so wird die Flächengleichung:

$$\xi\eta = \zeta.$$

---

[1]) Diese Verbiegung ist dem Verfasser bekannt aus einem Seminar von Prof. *Lagally* über Diff.-Geom., Dresden W.-S. 1923/24 und aus persönlichen Mitteilungen.

Dabei stehen die Koordinatenachsen wieder senkrecht aufeinander. Die Fläche enthält zwei Geradenscharen, die den Ebenen $\xi = 0$ bezw. $\eta = 0$ parallellaufen. Zwei dieser Geraden — aus jeder Schar eine — liegen in der Ebene $\zeta = 0$ und fallen, wie aus (8 a) hervorgeht, mit der ξ- bezw. η-Achse zusammen.

Also steht jede von ihnen auf einer der beiden Ebenen $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ senkrecht und wird von allen Geraden derjenigen Schar, der sie selbst nicht angehört, senkrecht geschnitten.

Die Fläche (8) soll derart isometrisch deformiert werden, daß die Eigenschaft einer Translationsfläche erhalten bleibt, daß also die Koordinaten partikuläre Integrale der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\Theta_{uv} = 0$$

bleiben [1]).

Eine solche Verbiegung ist immer möglich, wenn die erzeugenden Kurven Minimalkurven sind, oder wenn sie ebene Kurven sind und in zueinander senkrechten Ebenen liegen. Das zweite ist hier der Fall.

Die Koordinaten der Biegungsfläche kann man dann folgendermaßen ansetzen:

$$x = A_1(u); \quad y = B_1(v); \quad z = A_2(u) + B_2(v). \tag{9}$$

Die Linienelemente beider sind folgende:

$$\begin{cases} ds_0^2 = (1 + 4u^2)\,du^2 - 8uv\,du\,dv + (1 + 4v^2)\,dv^2 \\ ds^2 = (A_1'^2 + A_2'^2)\,du^2 + 2A_2'B_2'\,du\,dv + (B_1'^2 + B_2'^2)\,dv^2. \end{cases} \tag{10}$$

Durch Gleichsetzen

$$ds_0^2 = ds^2$$

ergeben sich folgende Bedingungen:

$$A_1'^2 + A_2'^2 = 1 + 4u^2 \tag{11 a}$$

$$A_2'B_2' = -4uv \tag{11 b}$$

$$B_1'^2 + B_2'^2 = 1 + 4v^2. \tag{11 c}$$

Aus (11 b) folgt:

$$\begin{cases} A_2' = 2cu \\ B_2' = -2\dfrac{v}{c}, \end{cases} \tag{11 e}$$

eingesetzt in (11 a) und (11 c):

$$A_1'^2 = 1 + 4u^2(1 - c^2) \tag{11 d}$$

$$B_1'^2 = 1 + 4v^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\right). \tag{11 f}$$

Endlich ergeben sich Koordinaten der Biegungsfläche des Hyperboloids nach (9):

$$x = \int \sqrt{1 + 4u^2(1 - c^2)}\,du$$

$$y = \int \sqrt{1 + 4v^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)}\,dv$$

$$z = cu^2 - \frac{v^2}{c}.$$

Dabei ist die Wurzel stets positiv genommen und die additiven Konstanten x^*, y^*, z^* gleich Null gesetzt, da man auf Bewegungen im Raum keine Rücksicht zu nehmen braucht.

[1]) *Bianchi-Lukat*, Differentialgeometrie, II. Aufl. 1910, S. 111.

Um stets reelle Form zu bekommen, schreiben wir eine der Gleichungen ein klein wenig anders:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \int \sqrt{1 - 4u^2(c^2-1)}\, du \\ y = \int \sqrt{1 + 4v^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)}\, dv \\ z = c\,u^2 - \frac{v^2}{c}\,. \end{cases}$$

Man erkennt sofort folgendes: Ersetzt man c durch $\frac{1}{c}$, so vertauschen sich x und y, und z ändert sein Vorzeichen.

Wir können also ein- für allemal auf diese Drehspiegelung verzichten und stets

$$c \geqq 1$$

setzen, wobei übrigens $c = 1$ das hyperbolische Paraboloid selbst gibt. Um rationale Form zu bekommen, setzen wir:

$$c = \mathfrak{Cof}\,\gamma$$
$$1 - \frac{1}{c^2} = \mathfrak{Tg}^2\,\gamma\,.$$

Da ferner, wenn wir uns auf reelle Biegungsflächen beschränken, stets

$$2u\,\mathfrak{Sin}\,\gamma \leqq 1$$

sein muß, kann man in (12) folgendermaßen substituieren:

$$(13)\qquad \begin{cases} 2u\,\mathfrak{Sin}\,\gamma = \sin p \\ 2v\,\mathfrak{Tg}\,\gamma = \mathfrak{Sin}\,q\,. \end{cases}$$

Dann bekommt man die Integrale in der Form:

$$(14\,a)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,(\sin p \cos p + p) \\ y &= \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,(\mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,q + q) \\ z &= \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}\,(\sin^2 p - \mathfrak{Sin}^2\,q) \end{aligned}}\,.$$

Macht man die Substitutionen rückgängig, so ergibt sich:

$$(14)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,u\sqrt{1 - 4u^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma} + \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,\operatorname{arc\,sin}\,(2u\,\mathfrak{Sin}\,\gamma) \\ y &= \frac{1}{2}\,v\sqrt{1 + 4v^2\,\mathfrak{Tg}^2\,\gamma} + \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\,(2v\,\mathfrak{Tg}\,\gamma) \\ z &= \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}\,(\mathfrak{Cof}^2\,\gamma\,u^2 - v^2) \end{aligned}}\,.$$

In beiden Formen werden wir von den eben gefundenen Gleichungen Gebrauch machen.

§ 4. Einführung eines Systems geodätischer Normalkoordinaten.

Da *Jonas* stets von einem geodätischen Normalkoordinatensystem ausgeht, müssen wir versuchen, ein solches einzuführen.

Das Paraboloid hatte folgende Parameterdarstellung:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 - v^2 , \tag{8}$$

und das Linienelement hat die Form:

$$ds^2 = (1 + 4u^2)\,du^2 - 8uv\,du\,dv + (1 + 4v^2)\,dv^2 . \tag{10 a}$$

Die beiden Geradenscharen des hyperbolischen Paraboloids sind dann:

$$\begin{cases} u + v = 2\varrho \\ u - v = 2\sigma . \end{cases} \tag{15}$$

Wir wählen die eine, $\sigma =$ const., als Schar der Erzeugenden des Konoids aus, dann ist $\varrho = 0$ die Achse des Konoids. Führt man ϱ und σ in das Linienelement ein, so ergibt sich:

$$ds^2 = 2(1 + 8\sigma^2)\,d\varrho^2 + 32\,\varrho\,\sigma\,d\varrho\,d\sigma + 2(1 + 8\varrho^2)\,d\sigma^2 . \tag{16}$$

Die Bogenlänge einer geodätischen Linie $\sigma = c$ wird dann:

$$ds = dr = \sqrt{2}\sqrt{1 + 8\sigma^2}\,d\varrho \qquad \text{(NB! } \sigma = \text{const.)}$$

also:

$$r = \varrho\sqrt{2}\sqrt{1 + 8\sigma^2} . \tag{17}$$

Differentiiert man r total, so erhält man:

$$dr = d\varrho\sqrt{2}\sqrt{1 + 8\sigma^2} + \frac{8\sqrt{2}\,\varrho\,\sigma\,d\sigma}{\sqrt{1 + 8\sigma^2}}$$

und

$$dr^2 = 2\,d\varrho^2(1 + 8\sigma^2) + 32\,\varrho\,\sigma\,d\varrho\,d\sigma + \frac{128\,\varrho^2\sigma^2\,d\sigma^2}{1 + 8\sigma^2} . \tag{18}$$

Man erkennt, daß in (16) und (18) je die Glieder mit $d\varrho^2$ und $d\varrho\,d\sigma$ übereinstimmen, man kann also dr^2 in ds^2 als neuen Parameter einführen:

$$ds^2 = dr^2 + 2\left[(1 + 8\varrho^2) - \frac{64\,\varrho^2\sigma^2}{1 + 8\sigma^2}\right] d\sigma^2 ,$$

und durch leichte Umformung erhält man:

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + \left[r^2 + \frac{1}{4}(1 + 8\sigma^2)^2\right]\frac{8\,d\sigma^2}{(1 + 8\sigma^2)^2}} . \tag{19}$$

Es ist also gelungen, die *Gauß*sche Form des Linienelements, bezogen auf geodätische Normalkoordinaten, herzustellen.

Setzt man:

$$\frac{2\sqrt{2}\,d\sigma}{1 + 8\sigma^2} = d\varphi ,$$

also

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\,\varphi , \tag{20}$$

so wird in der Tat

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + \left[r^2 + \frac{1}{4\cos^4\varphi}\right] d\varphi^2} . \tag{21}$$

Führen wir in den Transformationsformeln (17) und (20) statt ϱ und σ wieder u und v ein, so ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\sqrt{1+2(u-v)^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{2}\,(u-v) \end{aligned}} \tag{22}$$

Zwischen den einzelnen Koordinatensystemen besteht dann folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} x &= u & u+v &= 2\varrho = \sqrt{2}\,r\cos\varphi \\ y &= v & u-v &= 2\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\varphi \\ z &= u^2 - v^2 & u^2-v^2 &= 4\varrho\sigma = r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(r\cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \\ v &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \end{aligned}\right. \tag{23}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\varphi\,,$$

also

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+2(u-v)^2}}} \tag{24}$$

Damit ist nun alles gefunden, was zur Aufstellung der Evolventenfläche nötig ist.

Erwähnt sei nur noch, daß die Funktion $\Phi(\varphi)$, die in § 2 im Linienelement vorkam, in unserm Falle nach (21)

$$\Phi = \frac{1}{4\cos^4\varphi}$$

ist.

§ 5. Parameterdarstellung der Evolventenfläche.

Zur Bestimmung der Evolventenfläche ist jetzt nötig, die Tangenten an die Biegungslinien der Erzeugenden für die Biegungsfläche des Paraboloids aufzustellen.

Aus den Gleichungen (14) folgt:

$$\begin{aligned} x_u &= \sqrt{1-4u^2\,\mathfrak{Sin}^2\gamma} & x_v &= 0 \\ y_u &= 0 & y_v &= \sqrt{1+4v^2\,\mathfrak{Tg}^2\gamma} \\ z_u &= 2\,\mathfrak{Cof}\,\gamma\,u & z_v &= \frac{-2}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}\,v\,. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{\partial u}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial r}$ nach (24) erhält man:

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{\sqrt{1-4u^2\,\mathfrak{Sin}^2\gamma}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2(u-v)^2}} \\ y_r &= \frac{\sqrt{1+4v^2\,\mathfrak{Tg}^2\gamma}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2(u-v)^2}} \\ z_r &= \frac{2\,\mathfrak{Cof}^2\gamma\cdot u - 2v}{\sqrt{2}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma\cdot\sqrt{1+2(u-v)^2}}\,. \end{aligned}$$

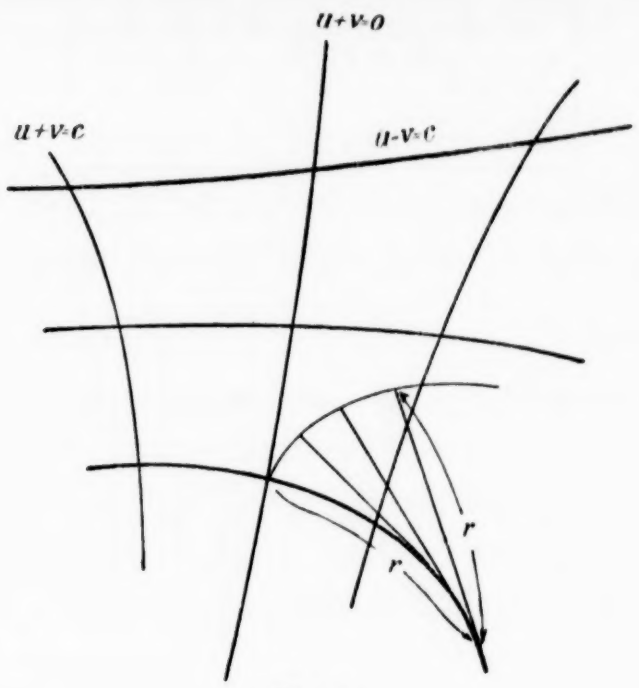

Fig. 3.

Nach Früherem ist die Parameterdarstellung der Evolventenfläche:

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = x - r x_r; \quad \mathfrak{y} = y - r y_r; \quad \mathfrak{z} = z - r z_r.$$

Das ergibt hier:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2} u \sqrt{1 - 4u^2 \operatorname{Sin}^2 \gamma} + \frac{\operatorname{arc\,sin}(2u \operatorname{Sin} \gamma)}{4 \operatorname{Sin} \gamma} - \frac{1}{2}(u+v)\sqrt{1 - 4u^2 \operatorname{Sin}^2 \gamma}$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{2} v \sqrt{1 + 4v^2 \operatorname{Tg}^2 \gamma} + \frac{\operatorname{Ar\,Sin}(2v \operatorname{Tg} \gamma)}{4 \operatorname{Tg} \gamma} - \frac{1}{2}(u+v)\sqrt{1 + 4v^2 \operatorname{Tg}^2 \gamma}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\operatorname{Cof} \gamma}(\operatorname{Cof}^2 \gamma \cdot u^2 - v^2) - \frac{u+v}{\operatorname{Cof} \gamma}(\operatorname{Cof}^2 \gamma \cdot u - v)$$

oder vereinfacht:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{4 \operatorname{Sin} \gamma} \operatorname{arc\,sin}(2u \operatorname{Sin} \gamma) - \frac{1}{2} v \sqrt{1 - 4u^2 \operatorname{Sin}^2 \gamma}$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{4 \operatorname{Tg} \gamma} \operatorname{Ar\,Sin}(2v \operatorname{Tg} \gamma) - \frac{1}{2} u \sqrt{1 + 4v^2 \operatorname{Tg}^2 \gamma}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{-uv \operatorname{Sin}^2 \gamma}{\operatorname{Cof} \gamma}.$$

Führen wir mit Hilfe der Beziehungen

$$(13) \qquad 2u \operatorname{Sin} \gamma = \sin p; \quad 2v \operatorname{Tg} \gamma = \operatorname{Sin} q$$

die Parameter p und q ein, so vereinfachen sich die Formeln:

$$(26) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \frac{1}{4 \operatorname{Sin} \gamma} p - \frac{1}{4 \operatorname{Tg} \gamma} \cos p \operatorname{Sin} q \\ \mathfrak{y} &= \frac{1}{4 \operatorname{Tg} \gamma} q - \frac{1}{4 \operatorname{Sin} \gamma} \sin p \operatorname{Cof} q \\ \mathfrak{z} &= -\frac{1}{4} \sin p \operatorname{Sin} q \end{aligned}}.$$

§ 6. Gleichung der Krümmungslinien der ersten Schar.

Als Erstes soll nun die Gleichung der Krümmungslinien der ersten Schar aufgestellt werden. Diese Schar entspricht, wie einleitend erwähnt, den Biegungslinien der Erzeugenden des geraden Konoids.

Als Erzeugende hatten wir die Kurven

$$u - v = c \tag{15 b}$$

auf dem hyperbolischen Paraboloid ausgewählt. Das ist dann zugleich die gesuchte Gleichung der Krümmungslinien der ersten Schar auf unserer Evolventenfläche.

Führen wir die Parameter p und q ein, so wird:

$$u - v = \frac{\sin p}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = c\,.$$

Setzt man darin die rechte Seite gleich $U\sqrt{2}$ [1]), so wird die Gleichung der Krümmungslinien der ersten Schar:

$$\boxed{U = \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = \text{const.}} \tag{27}$$

Übrigens ist nach (20):

$$U = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,. \tag{27 a}$$

Wir wollen den Parameter U in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einführen und die Projektion der Kurven in die XZ- und YZ-Ebene betrachten.

Aus (27) folgt:

$$\mathfrak{Sin}\,q = \frac{\sin p - 2\sqrt{2}\,U\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}{\mathfrak{Cos}\,\gamma}\;;\quad \sin p = \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cos}\,\gamma + 2\sqrt{2}\,U\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,.$$

Dann wird:

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,[p - \sin p\,\cos p + 2\sqrt{2}\,U\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\cos p] \\ \mathfrak{z} = \dfrac{-1}{4\,\mathfrak{Cos}\,\gamma}\,[\sin^2 p - 2\sqrt{2}\,U\sin p\,\mathfrak{Sin}\,\gamma] \end{cases} \tag{28}$$

und

$$\begin{cases} \mathfrak{y} = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,[q - \mathfrak{Cos}\,q\,\mathfrak{Sin}\,q - 2\sqrt{2}\,U\,\mathfrak{Cos}\,q\,\mathfrak{Tg}\,\gamma] \\ \mathfrak{z} = -\dfrac{1}{4}\,[\mathfrak{Sin}^2 q\,\mathfrak{Cos}\,\gamma + 2\sqrt{2}\,U\,\mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Sin}\,\gamma]\,. \end{cases} \tag{29}$$

Aus (28) und (29) oder auch aus (26) erkennt man, daß die Kurven $p = c$ und $q = c$ — d. h. die Bilder der Biegungslinien der Parabeln $u = c$ und $v = c$ — in je einer Tafelebene als Geraden abgebildet werden. Es kommt in (28) und (29) U immer nur linear vor. Eliminiert man U, so bekommt man:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\,\mathrm{tg}\,p\,\mathfrak{Tg}\,\gamma - \frac{1}{4}\,p\,\mathrm{tg}\,p\,\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\gamma} \tag{30 a}$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y}\,\mathfrak{Tg}\,q\,\mathfrak{Sin}\,\gamma - \frac{1}{4}\,q\,\mathfrak{Tg}\,q\,\mathfrak{Cos}\,\gamma\,. \tag{30 b}$$

---

[1]) Die Notwendigkeit des Faktors $\sqrt{2}$ ergibt sich später bei der Berechnung des Linienelements.

Untersucht man die Tangentenrichtung der Kurven $U = c$ in beiden Tafeln, so findet sich, daß diese von U unabhängig ist. Es ergibt sich nämlich:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}} = - \mathfrak{Tg}\,\gamma \operatorname{cotg} p \tag{31 a}$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{y}} = + \mathfrak{Cotg}\,q\,\mathfrak{Sin}\,\gamma\,. \tag{31 b}$$

Mit anderen Worten: p und q sind Funktionen von $\mathfrak{z}'$ allein, wobei unter $\mathfrak{z}'$ einmal $\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}$ und das andere Mal $\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{y}}$ zu verstehen ist.

Hier ist eine geometrische Deutung möglich: Die Parameterkurven sind Berührungskurven von Zylindern, deren Achsenrichtung von p bezw. q abhängt. Es sind also Eigenschattengrenzen für Lichtstrahlen parallel zur XZ-Ebene in Richtung

$$\lambda_1 = \operatorname{arc\,tg}\,(- \mathfrak{Tg}\,\gamma \operatorname{cotg} p)$$

und parallel zur YZ-Ebene in Richtung

$$\lambda_2 = \operatorname{arc\,tg}\,(\mathfrak{Cotg}\,q\,\mathfrak{Sin}\,\gamma).$$

§ 7. Die Gleichung der Haupttangentenkurven.

Wie wir sahen, müssen sich die Haupttangentenkurven auf Evoluten- und Evolventenflächen entsprechen. Es ist also nur nötig, die Differentialgleichung der Haupttangenten auf der Biegungsfläche des hyperbolischen Paraboloids aufzustellen.

Wir müssen aus (14 a) die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Koordinaten nach p und q berechnen:

$$x_p = \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,[\cos 2p + 1] \qquad x_q = 0$$

$$y_p = 0 \qquad y_q = \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,[\mathfrak{Cof}\,2q + 1]$$

$$z_p = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma} \sin 2p \qquad z_q = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}\,\mathfrak{Sin}\,2q$$

$$x_{pp} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,[-2 \sin 2p] \qquad x_{pq} = 0 \qquad x_{qq} = 0$$

$$y_{pp} = 0 \qquad y_{pq} = 0 \qquad y_{qq} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,2\,\mathfrak{Sin}\,2q$$

$$z_{pp} = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}\,2\cos 2p \qquad z_{pq} = 0 \qquad z_{qq} = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma}{4\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}\,2\,\mathfrak{Cof}\,2q\,.$$

Daraus ergeben sich die Größen D, D', D'' — abgesehen von dem Faktor $W = \sqrt{EG - F^2}$ — :

$$WD = \frac{\cos^2 p\,\mathfrak{Cof}^2\,q}{8\,\mathfrak{Tg}^2\,\gamma\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}$$

$$WD' = 0$$

$$WD'' = -\frac{\cos^2 p\,\mathfrak{Cof}^2\,q}{8\,\mathfrak{Tg}^2\,\gamma\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma}\,.$$

Die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven ist dann:

$$dp^2 - dq^2 = 0. \tag{32}$$

Und die Kurven selbst werden dargestellt durch $p \pm q = c$ oder

$$(33) \qquad \begin{cases} p + q = 2\alpha \\ p - q = 2\beta \,. \end{cases}$$

Diese Beziehung zeigt folgendes: Verändert man längs der Parabeln $u = c$ und $v = c$ die Zählung mit Hilfe der Substitution (13), so ergeben sich die Asymptotenlinien α, β als Diagonalkurven des Parabelnetzes p, q.

Es ist darum leicht, den Grundriß zu zeichnen (vgl. Fig. 4).

Diese einfache Beziehung überträgt sich dann auch auf die Evolventenfläche (Fig. 8).

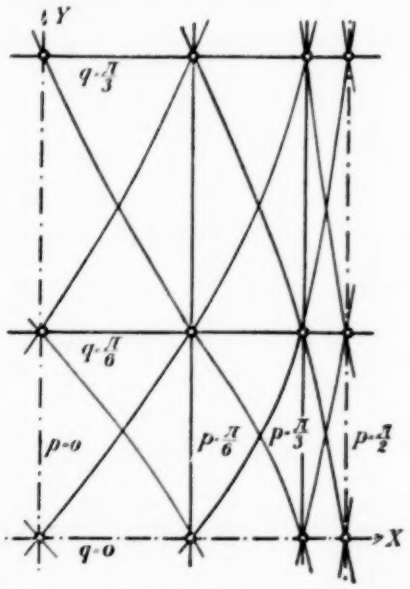

Fig. 4. Grundriß der Haupttangentenkurven der Evolutenfläche (Symmetrieachsen strichpunktiert).

§ 8. Das Gewebe. Die Krümmungslinien der zweiten Schar.

Wir haben die Bedingung dafür, daß die Parameterlinien α, β ein Gewebe bilden, in der Form:

$$(6) \qquad (\sqrt{E})_\beta = (\sqrt{G})_\alpha$$

geschrieben.

Dann liegt es nahe, mit *Jonas* eine Funktion U einzuführen, deren partielle Ableitungen $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ sind:

$$(34) \qquad \sqrt{E} = U_\alpha; \quad \sqrt{G} = U_\beta \,.$$

Sind jetzt noch überdies $\alpha = c$ und $\beta = c$ Hauptangentenkurven, so reduziert sich die zweite Fundamentalform auf:

$$(35) \qquad II = 2D' \, d\alpha \, d\beta \,,$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird dann:

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} d\beta^2 & -d\alpha\, d\beta & d\alpha^2 \\ U_\alpha^2 & F & U_\beta^2 \\ 0 & D' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$U_\alpha^2 \, d\alpha^2 - U_\beta^2 \, d\beta^2 = 0$$

und schließlich:

$$(37) \qquad U_\alpha \, d\alpha \pm U_\beta \, d\beta = 0 \,.$$

Die eine der beiden Differentialgleichungen (37) hat das Integral:

$$U = c.$$

Es seien damit die Krümmungslinien der ersten Art definiert. Ist diese Funktion identisch mit der durch (27) eingeführten Funktion:

$$(27) \qquad U = \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = c,$$

die ebenfalls die Krümmungslinien der ersten Schar liefert? Es wäre immerhin denkbar daß durch (36) nicht U selbst, sondern eine Funktion $\mathfrak{U}(U)$ definiert würde. Dann würde in (37) statt U nur $\mathfrak{U}(U)$ einzusetzen sein:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \alpha}\,d\alpha \pm \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \beta}\,d\beta = 0.$$

Das ergibt:

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dU}\,\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,d\alpha \pm \frac{d\mathfrak{U}}{dU}\,\frac{\partial U}{\partial \beta}\,d\beta = 0$$

und nach Abspalten des Faktors $\frac{d\mathfrak{U}}{dU}$:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,d\alpha \pm \frac{\partial U}{\partial \beta}\,d\beta = 0.$$

Es ist also gleichgültig, ob U oder $\mathfrak{U}(U)$ vorliegt. Wir können beide Funktionen, U in (27) und U in (36), identisch setzen.

Aus (27) folgt:

$$(38) \qquad dU = \frac{\cos p\,dp}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q\,dq}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}.$$

Nach (34) ist aber:

$$dp = d\alpha + d\beta$$
$$dq = d\alpha - d\beta.$$

Dann wird:

$$dU = \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right)d\alpha + \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right)d\beta.$$

Daraus gewinnt man nach (37) als Differentialgleichung für die Krümmungslinien der zweiten Schar:

$$\lambda\,dV = \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right)d\alpha - \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right)d\beta.$$

Das ergibt schließlich:

$$dV = \mathfrak{Cof}\,\gamma\,\frac{dp}{\cos p} - \frac{dq}{\mathfrak{Cof}\,q}$$

und integriert:

$$(39) \qquad \boxed{V = \mathfrak{Cof}\,\gamma\,\lg\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^{q}}.$$

Diese Schar hat jedoch für unsere Entwicklung keine Bedeutung.

§ 9. Das Linienelement der Evolventenfläche.

Aus den Gleichungen (36) könnten wir zwar die Größen E und G bestimmen, aber über die dritte Größe F der ersten Fundamentalform ist uns nichts ausgesagt. Wir wollen darum das Linienelement aus den Definitionsgleichungen:

$$\mathfrak{E} = \Sigma \mathfrak{x}_p^2, \quad \mathfrak{F} = \Sigma \mathfrak{x}_p \mathfrak{x}_q, \quad \mathfrak{G} = \Sigma \mathfrak{x}_q^2 \text{ [1]}$$

berechnen.

Aus (26) folgt:

$$(40)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_p = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q & \mathfrak{x}_q = -\dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\cos p\,\mathfrak{Cof}\,q \\ \mathfrak{y}_p = -\dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\cos p\,\mathfrak{Cof}\,q & \mathfrak{y}_q = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} - \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q \\ \mathfrak{z}_p = -\dfrac{1}{4}\cos p\,\mathfrak{Sin}\,q & \mathfrak{z}_q = -\dfrac{1}{4}\sin p\,\mathfrak{Cof}\,q\,. \end{cases}$$

Daraus erhält man nach einiger Umrechnung:

$$\begin{aligned} 16\,\mathfrak{Sin}^2\gamma\,\mathfrak{E} &= 2\cos^2 p + (\sin p + \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma)^2 \\ 16\,\mathfrak{Sin}^2\gamma\,\mathfrak{F} &= -2\,\mathfrak{Cof}\,\gamma\cos p\,\mathfrak{Cof}\,q \\ 16\,\mathfrak{Sin}^2\gamma\,\mathfrak{G} &= 2\,\mathfrak{Cof}^2\gamma\,\mathfrak{Cof}^2 q - (\sin p + \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma)^2. \end{aligned}$$

Das ergibt zunächst:

$$\begin{aligned} 16\,\mathfrak{Sin}^2\gamma\,d\mathfrak{s}^2 = {} & [2\cos^2 p + (\sin p + \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma)^2]\,dp^2 - 4\,\mathfrak{Cof}\,\gamma\cos p\,\mathfrak{Cof}\,q\,dp\,dq \\ & + [2\,\mathfrak{Cof}^2\gamma\,\mathfrak{Cof}^2 q - (\sin p + \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma)^2]\,dq^2\,. \end{aligned}$$

Das läßt sofort eine Umformung zu:

$$(41)\quad 16\,\mathfrak{Sin}^2\gamma\,d\mathfrak{s}^2 = (\sin p + \mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma)^2\,(dp^2 - dq^2) + 2[\cos p\,dp - \mathfrak{Cof}\,\gamma\,\mathfrak{Cof}\,q\,dq]^2$$

und schließlich:

$$(42)\quad d\mathfrak{s}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right]^2 (dp^2 - dq^2) + \left[\frac{\cos p\,dp}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q\,dq}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right]^2.$$

Hierin ist nun nach (34):

$$dp^2 - dq^2 = 4\,d\alpha\,d\beta$$

und nach (38):

$$\frac{\cos p\,dp}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q\,dq}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = dU\,.$$

Der Posten

$$\frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}$$

unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes von U. Wir wollen ihn darum $\bar{U}$ nennen:

$$(43)\qquad \bar{U} = \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,.$$

Dann können wir das Linienelement in folgende Form bringen:

$$(44)\qquad \boxed{d\mathfrak{s}^2 = 2\bar{U}^2\,d\alpha\,d\beta + dU^2}\,.$$

---

[1]) In bezug auf die Schreibweise sei auf Fußnote [2]) Seite 153 verwiesen.

Für die Asymptotenlinien $\alpha = c$ oder $\beta = c$ reduziert sich das Linienelement auf $d\mathfrak{s}^2 = dU^2$, und zwar für $\beta = c$, $d\beta = 0$:

$$d\mathfrak{s}_1 = \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right) d\alpha = \sqrt{E}\,d\alpha$$

und für $\alpha = c$, $d\alpha = 0$:

$$d\mathfrak{s}_2 = \left(\frac{\cos p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Cof}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\right) d\beta = \sqrt{G}\,d\beta$$

in Übereinstimmung mit (34) und (38).

Ferner muß nach (4 a) für $\alpha = c$ bzw. $\beta = c$:

$$d\mathfrak{s} = \sqrt{\Phi(\varphi)}\,d\varphi$$

sein.

Mit Hilfe der Transformation (27 a) erhält man:

$$d\mathfrak{s} = dU = \frac{1}{2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

also:

$$\Phi = \frac{1}{4\cos^4\varphi}$$

in Übereinstimmung mit (25).

§ 10. Das Krümmungsmaß der Evolventenfläche.

Zum Schluß sei noch das Krümmungsmaß berechnet:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2}{\mathfrak{E}\,\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}\,.$$

Zunächst $\mathfrak{E}\,\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{W}^2$:

$$\mathfrak{W}^2 = \left(\frac{\cos^2 p}{8\,\mathfrak{Sin}^2\gamma} + \frac{1}{2}\bar{U}^2\right)\left(\frac{\mathfrak{Cof}^2 q}{8\,\mathfrak{Tg}^2\gamma} - \frac{1}{2}\bar{U}^2\right) - \frac{\cos^2 p\,\mathfrak{Cof}^2 q}{64\,\mathfrak{Tg}^2\gamma\,\mathfrak{Sin}^2\gamma}$$
$$= \frac{1}{4}\bar{U}^2\left[\frac{\mathfrak{Cof}^2 q}{4\,\mathfrak{Tg}^2\gamma} - \frac{\cos^2 p}{4\,\mathfrak{Sin}^2\gamma} - \bar{U}^2\right].$$

Das läßt sich durch einige Umformungen in folgender Gestalt schreiben:

$$\mathfrak{W}^2 = \frac{1}{16}\bar{U}^2[4U^2 + 1] \tag{45}$$

Da wir wissen, daß die zweite Fundamentalform auf der Evolventenfläche derjenigen auf der Evolutenfläche proportional ist, brauchen wir nur $\mathfrak{D}$ zu berechnen, da ja $\mathfrak{D}' = 0$ und $\mathfrak{D}'' = -\mathfrak{D}$ ist. Zur Berechnung von $\mathfrak{D}$ brauchen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Koordinaten.

Aus (40) folgt:

$$\mathfrak{x}_{pp} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\cos p\,\mathfrak{Sin}\,q \qquad \mathfrak{y}_{pp} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\sin p\,\mathfrak{Cof}\,q$$

$$\mathfrak{z}_{pp} = \frac{1}{4}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q\,.$$

Dann ist:

$$\mathfrak{W}\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{\cos p \,\mathfrak{Sin}\, q}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}; & \frac{\sin p \,\mathfrak{Cof}\, q}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}; & \frac{1}{4}\sin p \,\mathfrak{Sin}\, q \\ \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\sin p \,\mathfrak{Sin}\, q}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}; & -\frac{\cos p \,\mathfrak{Cof}\, q}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}; & \frac{1}{4}\cos p \,\mathfrak{Sin}\, q \\ -\frac{\cos p \,\mathfrak{Cof}\, q}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}; & \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} - \frac{\sin p \,\mathfrak{Sin}\, q}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}; & -\frac{1}{4}\sin p \,\mathfrak{Cof}\, q \end{vmatrix}.$$

Das ergibt schließlich:

$$\mathfrak{D} = -\mathfrak{D}'' = \frac{1}{64\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{Sin}^2\gamma}(\mathfrak{Sin}\, q\,\mathfrak{Cof}\,\gamma + \sin p)^2$$
$$= \frac{1}{8\,\mathfrak{W}}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\, q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} + \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\right)^2,$$

also:

$$\mathfrak{D} = -\mathfrak{D}'' = \frac{1}{8\,\mathfrak{W}}\,\bar{U}^2 \tag{45}$$

und

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2 = -\frac{\bar{U}^4}{64\,\mathfrak{W}^2}. \tag{46}$$

Also kann man für das Krümmungsmaß ansetzen:

$$\mathfrak{K} = \frac{-256\,\bar{U}^4}{64\,\bar{U}^4(1+4\,U^2)^2},$$

und daraus folgt endlich:

$$\boxed{\mathfrak{K} = \frac{-4}{(1+4\,U^2)^2}}. \tag{47}$$

Man erkennt daraus, daß $\mathfrak{K}$ tatsächlich nur von U abhängig ist, daß also die Krümmungslinien der ersten Schar, die den Erzeugenden des Konoids entsprechen, zugleich Kurven konstanter Krümmung sind, was ja schon einleitend erwähnt war.

Vor allem geht daraus hervor, daß die Fläche nirgends elliptisch gekrümmt sein kann, da $\mathfrak{K}$ stets negativ ist. Es existiert im Endlichen auch keine parabolische Kurve ($\mathfrak{K} = 0$).

Damit sind nun die nötigen Formeln zusammengestellt. Wir müssen nun versuchen, ein Bild von der Fläche zu gewinnen.

Kapitel III.

Geometrische Betrachtungen.

§ 11. Realitätsverhältnisse. Periode.

Ehe wir in die Geometrie der gefundenen Fläche eindringen, ist es nötig, zu prüfen, wieweit sie überhaupt reell ist. Da sie von einer Biegungsfläche abgeleitet ist, muß die reelle Existenz dieser Fläche untersucht werden.

Das hyperbolische Paraboloid als Ganzes ist starr, mindestens gegenüber Verbiegungen, bei denen es Translationsfläche bleibt. Es kann immer nur ein Streifen zwischen zwei Kurven $u = \pm u_0$ verbogen werden. Diese Grenze geht in die Verbie-

gungskonstante γ ein. Die Verbiegung besteht nämlich aus einem Krümmen der Kurven $v = c$ und einem Strecken der Kurven $u = c$.

Aus der Integraldarstellung (12) geht hervor, daß das Zusammenbiegen einer u-Kurve ($v = c$) nur bis zu einer bestimmten Grenze möglich ist. Denn sobald

$$1 - 4\,u^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma < 0$$

wird, wird x imaginär. Zugleich erkennt man, daß für

$$u = u_0 = \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} \tag{48}$$

dx verschwindet, d. h. daß dort die Kurve $v = c$ eine vertikale Tangente hat. Hier ist dann eine Grenze bei der Verbiegung erreicht. Die Fläche hat dort eine Kante mit fester Tangentialebene. Mit andern Worten: es kann, wenn einmal γ festgelegt ist, nur ein ganz bestimmter Flächenstreifen verbogen werden.

Wie steht es aber mit der Biegungsfläche? Hört diese an der Stelle $u = \pm u_0$ ebenfalls auf? Die Frage ist zu verneinen. Denn infolge der Vieldeutigkeit der arc sin-Funktion ist die x-Koordinate folgendermaßen zu schreiben:

$$x = \frac{1}{2}\,u\,\sqrt{1 - 4u^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma} + \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,\arcsin\,(2u\,\mathfrak{Sin}\,\gamma) + \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,k\pi\,.$$

Dasselbe ergibt sich auch, wenn man die Form (14a) benutzt:

$$x = \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,(\sin p\,\cos p + p)\,.$$

Dabei war:

$$u = \frac{\sin p}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,,$$

für $u = u_0$ ergibt sich $p = \frac{\pi}{2}$. Hier sieht man sofort, daß für $p = \frac{\pi}{2}$ keine Grenze der Fläche erreicht ist.

Wir erkennen also eine periodische Wiederholung der Biegungsfläche längs der X-Achse.

Aus (26) folgt, daß x um $\frac{\pi}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}$ wächst, y und z aber ungeändert bleiben, wenn p um 2π wächst.

§ 12. Gestalt der Parameterkurven.

Es wurde schon früher festgestellt — in § 6, Gleichungen (28) und (29) —, daß die Parameterkurven $p = c$ und $q = c$ in je einer Tafelebene [1]) als Geraden projiziert werden.

Das heißt aber: *Die Parameterkurven sind eben*, und ihre Ebenen stehen auf je einer Tafel senkrecht. Es genügt dann zu ihrer Beschreibung, ihre Projektion in diejenige Tafel zu untersuchen, in der sie nicht als Geraden abgebildet werden. (Vgl. Fig. 5 u. 6).

---

[1]) Es kommt nur Auf- und Seitenriß, nicht aber Grundriß in Frage.

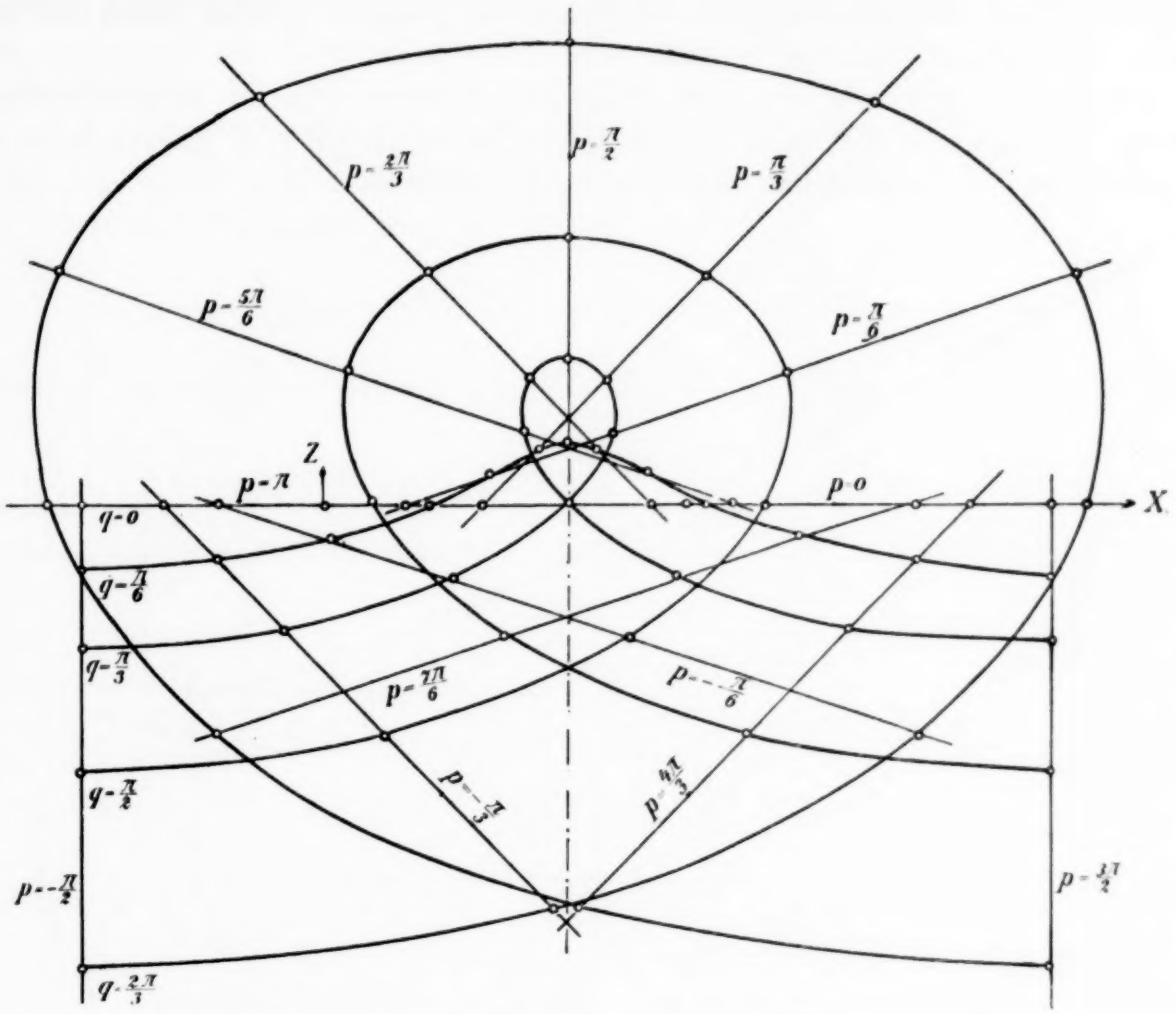

Fig. 5. XZ-Projektion der Parameterkurven p, q, d. h. der Bilder der Biegungslinien der Parabeln $u. v$ bei geeigneter Zählung.

Die Kurven $q = c$ haben in der XZ-Ebene folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,p - \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\cos p\,\mathfrak{Sin}\,q$$

$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{4}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q.$$

Die Schar $q = c$ besteht also aus Rollkurven, unter denen die Kurve $q = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}$ [1]) eine gemeine Zykloide ist. Die Kurve $q = 0$ ist eine Affine zur gewöhnlichen sin-Kurve, die ganz in der XY-Ebene liegt. Im übrigen sieht man leicht, daß die Kurven $q = +q_0$ und $q = -q_0$ miteinander kongruent, aber gegeneinander um eine halbe Periodenlänge verschoben sind.

Die Kurven $p = c$ werden in der YZ-Ebene durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\,q - \frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\sin p\,\mathfrak{Cof}\,q$$

$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{4}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q.$$

Sie sind also nicht periodisch. Für $p = 0$ ergibt sich eine Affine zur gewöhnlichen $\mathfrak{Sin}$-Kurve, die ganz in der XY-Ebene liegt. Die übrigen q-Kurven ($p = c$!) für $0 < p \leqq \pi/2$

[1]) Diese Grenze hängt mit der noch zu besprechenden Kurve $\overline{U} = 0$ zusammen.

sind dieser Kurve in gewissem Sinne ähnlich gebaut, nur zu beiden Seiten des Wendepunktes verschieden stark gekrümmt.

Für $\pi/2 \leqq p \leqq \pi$ ergeben sich dieselben Kurven, wie im ersten Quadranten, während die Kurven, die den Parameterwerten $-\pi/2 \leqq p \leqq 0$ entsprechen, durch Spiegelung an der Z-Achse aus den ersten hervorgehen.

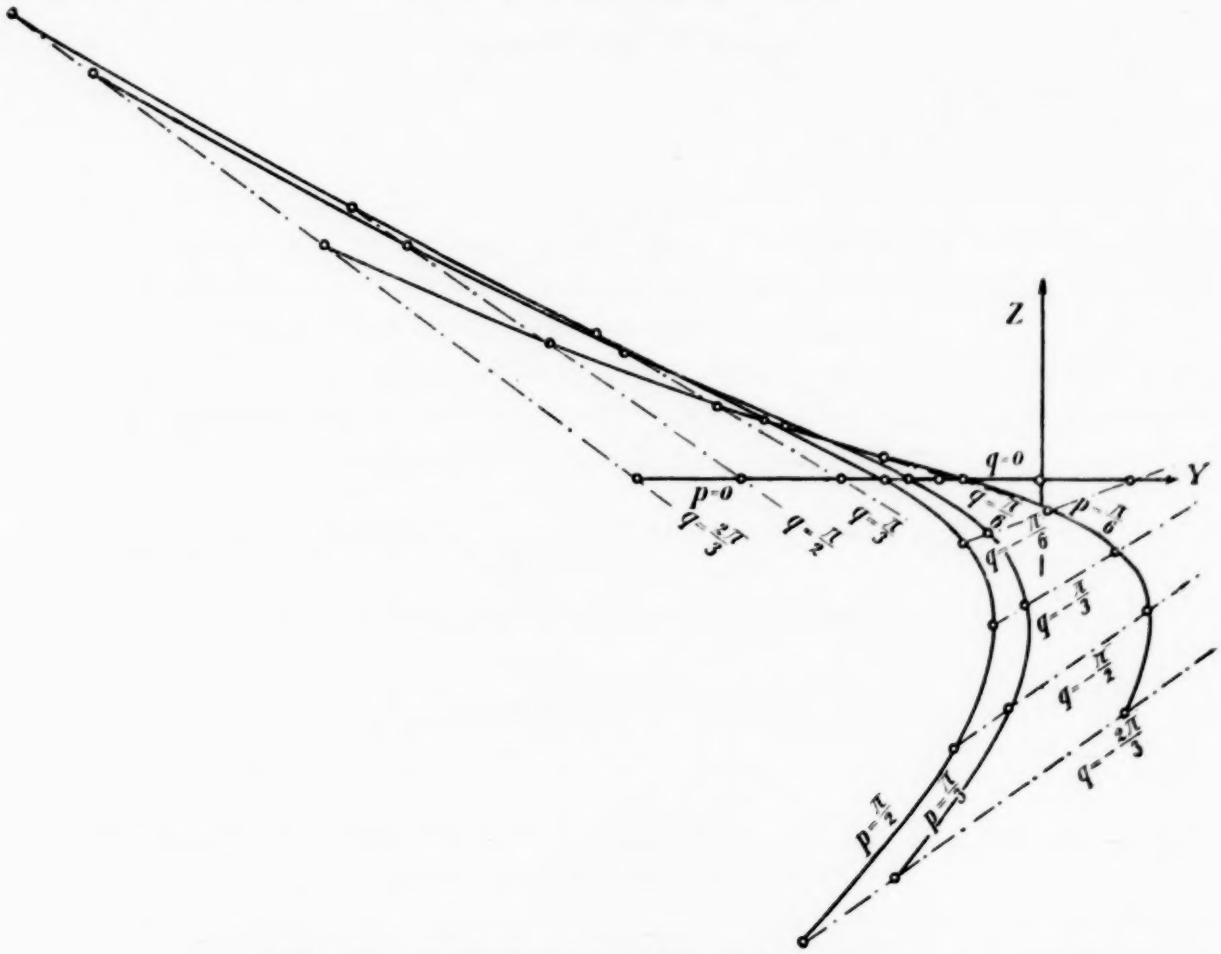

Fig. 6. YZ-Projektion der Parameterkurven p, q.

Allen gemeinsam ist jedenfalls das Vorhandensein eines Wendepunktes. Um diesen zu finden, müssen wir bekanntlich:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{y' z'' - z' y''}{y'^2} = 0 \tag{49}$$

setzen. Das ergibt hier:

$$\mathfrak{Sin}\, q\, \mathfrak{Cos}\, \gamma + \sin p = 0$$

oder nach Division durch $2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma$:

$$\frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\, q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = 0\,.$$

Nach früherer Festsetzung können wir dafür schreiben (vgl. 43):

$$\bar{U} = 0. \tag{50}$$

Stellen wir die Gleichung der Tangenten an die Kurve $\bar{U} = 0$ auf, so finden wir, daß sie in der XZ- bzw. YZ-Projektion mit den Kurven $q = c$ und $p = c$ identisch sind.

Die Ebenen der Kurven $p = c$ und $q = c$ hüllen also die projizierenden Zylinder der Kurve $\bar{U} = 0$ ein. Die Bedeutung der Tatsache, daß sich je zwei konsekutive Kurven

$p = c$ bzw. $q = c$ auf der Kurve $\bar{U} = 0$ schneiden, wird erst vollkommen verständlich werden, wenn wir die Krümmungslinien betrachtet haben.

§ 13. Gestalt der Krümmungslinien der ersten Schar.

Es seien noch einmal die Gleichungen der Evolventenfläche, bezogen auf die Parameter p und U, aufgestellt (vgl. (28) u. (29)):

$$(51)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,[p - \sin p\cos p + U\cos p] \\ \mathfrak{y} = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\left[\mathfrak{Cof}\,\gamma\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{\sin p - U}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}\right) - \dfrac{\sin p}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\,\gamma + (\sin p - U)^2}\right] \\ \mathfrak{z} = \dfrac{-1}{4\,\mathfrak{Cof}\,\gamma}\,[\sin^2 p - U\sin p]. \end{cases}$$

Uns interessiert besonders die XZ-Projektion der Kurven $U = c$. (Vgl. Fig. 7.)

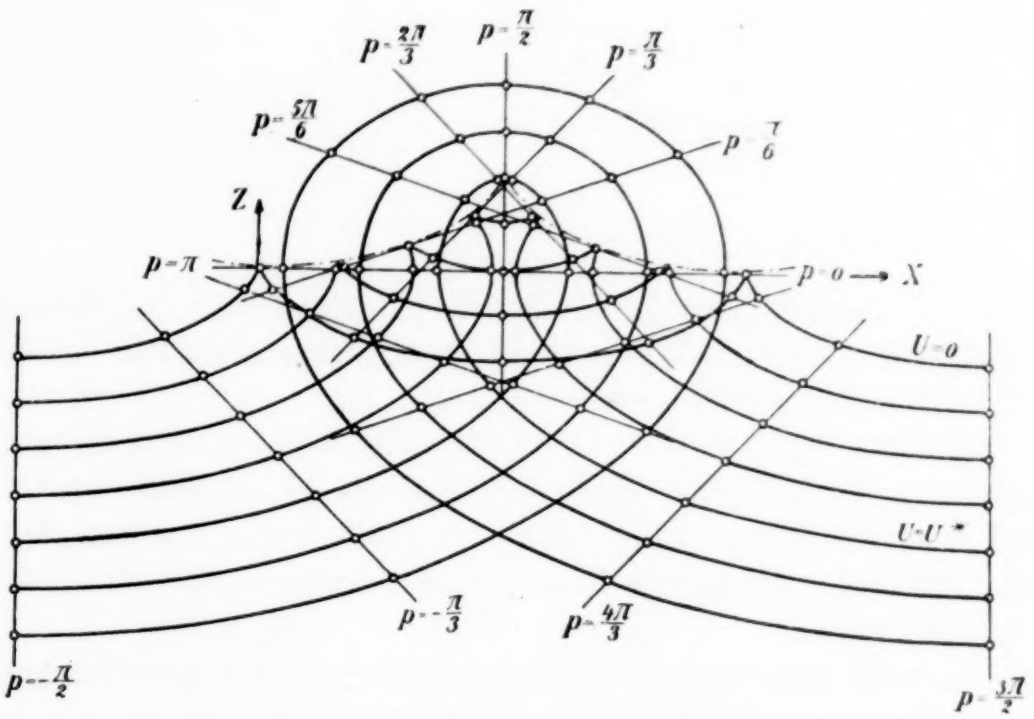

Fig. 7. Krümmungslinien der ersten Schar $U = c$.

Man erkennt aus (51), daß auch die Kurven $U = c$ die Periode 2π für den Parameter p besitzen. Es ist jedoch eine darunter, nämlich die Kurve $U = 0$, die in dieser Tafel nur die Periode π hat.

Es hängen dann auch hier $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ nicht mehr von p, sondern von $2p$ ab. Natürlich ist im Raume — wie die Y-Koordinate zeigt — die Periode ebenfalls 2π wie bei den übrigen Kurven $U = c$.

Diese gehen in der XZ-Ebene aus der Kurve $U = 0$ dadurch hervor, daß man zu den Koordinaten von $U = 0$ noch gewisse, in $\sin p$ oder $\cos p$ lineare Glieder hinzufügt.

Während, wie Fig. 7 zeigt, bei $U = 0$ alle Bögen gleich groß sind, wechseln dann bei den übrigen Kurven $U = c$ große und kleine Bögen miteinander ab. Je größer U wird, um so größer ist der Unterschied zwischen beiden Bögen, bis schließlich für eine Grenzlage $U = U^*$ der kleinere Bogen ganz verschwunden ist.

Die Krümmungslinien der ersten Schar sind, wie *Jonas* zeigt, Evolventen der

Biegungslinien der Erzeugenden des Konoids; jedoch entstehen sie nur teilweise durch Abwickeln. Überschreiten wir die Grenze $p = \pi/2$, so tritt an Stelle des Abwickelns ein Aufwickeln, wie das ja in der Ebene etwa bei den Epizykloiden und ihren Evolventen zu beobachten ist.

Das aber besagt, daß die Ebene $x = x(p, q)_{p=\pi/2}$ und ihre entsprechenden periodischen Wiederholungen Spiegelebenen unserer Fläche sind.

§ 14. Die Biegungslinie der Konoidachse.

Sie müssen dann auch Spiegelebenen für die Evolutenfläche sein. Das verträgt sich allerdings nicht mit der früher aufgestellten Behauptung, daß die Evolutenfläche die Periode π besitzt. Die Periode π ist nur in bezug auf die Kurven $q = c$ vorhanden.

Führt man nämlich in die Gleichungen der Biegungsfläche (14 a) die Funktion $\bar{U} = 0$ ein unter gleichzeitiger Elimination von q, so erhält man die Gleichung einer Raumkurve und zwar, wie sich noch zeigen wird, der Biegungslinie der Konoidachse:

$$(52) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}\,(\sin p \cos p + p) \\ y = \dfrac{-1}{4\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}\left(\dfrac{\sin p}{\mathfrak{Cof}^2\,\gamma}\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\,\gamma + \sin^2 p} + \mathfrak{ArSin}\left(\dfrac{\sin p}{\mathfrak{Cof}\,\gamma}\right)\right) \\ z = \dfrac{1}{4\,\mathfrak{Cof}\,\gamma}\sin^2 p\,. \end{cases}$$

Die XZ-Projektion zeigt wieder die Periode π. Untersucht man jedoch die Y-Koordinate, so bemerkt man, daß y nach Änderung von p um π sein Zeichen wechselt. Das bedeutet aber eine Periode 2π.

Die Projektion der Kurve $\bar{U} = 0$ in die XZ-Ebene ist der Ort der Spitzen der Krümmungslinien der ersten Schar. Diese Eigenschaft kommt nicht nur der Projektion zu, sondern auch der Kurve $\bar{U} = 0$ selbst, was man daraus erkennt, daß die Ableitungen der Koordinaten der Kurven $U = c$ an den Schnittpunkten mit der Kurve $\bar{U} = 0$ sämtlich verschwinden.

Diese Tatsache zeigt analytisch das, was man aus der geometrischen Definition der Fläche nach *Jonas* ableiten kann.

Jonas läßt die Evolventenfläche entstehen durch Abwickeln von unausdehnbaren, bis zur Biegungslinie der Achse reichenden Fäden. Im Anfangszustand befinden sich die Enden der Fäden aber alle auf der Biegungslinie der Achse selbst. Diese Kurve muß also auf der Evolventenfläche enthalten sein. Die Konoidachse hatte nach (15 a) die Gleichung:

$$u + v = 0$$

oder, wenn man mittels der Substitution (13) p und q einführt und durch $2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma$ dividiert:

$$\frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\,q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = \bar{U} = 0\,.$$

Also ist die Kurve $\bar{U} = 0$ tatsächlich die Kurve, die der Konoidachse entspricht.

Wir sahen aus (52), daß die Kurve $\bar{U} = 0$ in den Intervallen

$$-\frac{\pi}{2} < p < +\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < p < \frac{3\pi}{2}$$

nicht aus parallelen Zweigen besteht, sondern aus solchen, die durch Spiegelung an der Ebene $x = x(p, q)_{p=\pi/2}$ auseinander hervorgehen.

Da die Kurven $U = c$ einen Bogen von einem dieser Zweige zum anderen spannen, ist es klar, daß diese Bögen abwechselnd groß oder klein ausfallen müssen; nur die Kurve $U = 0$, die genau in der Mitte aufsitzt, bildet — wie schon erwähnt — stets gleich große Bögen.

Vertauschen wir in (52) $+ U$ mit $- U$, so tritt eine Verschiebung längs der X-Achse um eine halbe Periodenlänge ein, und y ändert sein Zeichen, wenn man diesen Zuwachs bei p mitberücksichtigt [1]). Die Kurven $U = \pm U_0$ sind also kongruent.

An den Stellen, wo eine Spitze der Kurve $\bar{U} = 0$ liegt, kann die entsprechende Kurve $U = U^*$ den kleinen Bogen nicht mehr ausbilden, also z. B. bei $p = \pi/2$. Um U^* zu berechnen, braucht man nur aus den folgenden Gleichungen $\mathfrak{Sin}\, q$ zu eliminieren und dann $p = \pi/2$ zu setzen:

$$U = \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} - \frac{\mathfrak{Sin}\, q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma}$$

$$\bar{U} = \frac{\sin p}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} + \frac{\mathfrak{Sin}\, q}{2\sqrt{2}\,\mathfrak{Tg}\,\gamma} = 0.$$

Dadurch erhält man:

$$U = U^* = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma}. \tag{53}$$

Jenseits dieser Grenze versagt die von *Jonas* gegebene geometrische Definition, nämlich Abwicklung von Fäden, die bis zur Biegungslinie der Achse reichen. Denn auf Biegungslinien der Erzeugenden für $U > U^*$ erreichen wir die Biegungslinie der Achse $\bar{U} = 0$ überhaupt nicht mehr.

Trotz allem existiert auch da eine analytische Fortsetzung. Wir brauchen nur die Interpretation der Gleichungen der Evolventenfläche durch Abwickeln von Fäden fallen zu lassen und dafür — unter Zurückgehen auf das geodätische Normalkoordinatensystem r, φ — zu sagen:

Wird auf den Tangenten an die Biegungslinien der Erzeugenden einer durch isometrische Deformation aus einem geraden Konoid hervorgegangenen Fläche jedesmal eine Strecke abgetragen, deren Maßzahl dem zugehörigen Parameterwert r gleich ist, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Fläche mit asymptotischem Gewebe.

Das allerdings kann man auch jenseits der Grenze $U = U^*$ noch tun. In der Tat macht die Zeichnung dieser Kurven nicht die geringsten Schwierigkeiten. Sie haben keine Spitzen mehr, sondern bilden Schleifen ganz ähnlich denen der Kurven $q = c$.

Die Gesamtheit der Spitzen, mit denen die Kurven $U = c$ für

$$- U^* < U < + U^*$$

auf der Kurve $\bar{U} = 0$ aufsitzen, bildet eine scharfe Kante. In diesem Intervall besteht die Fläche aus zwei übereinanderliegenden, an der Kante zusammenstoßenden Gewölben.

Jetzt erst wird die große Bedeutung der Kurve $\bar{U} = 0$ für die Gestalt der Fläche klar.

Wir lernten sie kennen:

---

[1]) Dasselbe sahen wir schon in § 12 bei den Kurven $q = c$.

1. als Spitzenkurve der Krümmungslinien der ersten Art, darum
2. als scharfe Kante der Evolventenfläche,
3. als Ort der Wendepunkte der Kurven $p = c$,
4. als Einhüllende sowohl der p- wie der q-Kurven.

Daraus folgt aber ohne weiteres: hier muß eine Verzweigung sein, an der die p- und q-Kurven aus dem unteren Gebiet in das obere treten und umgekehrt.

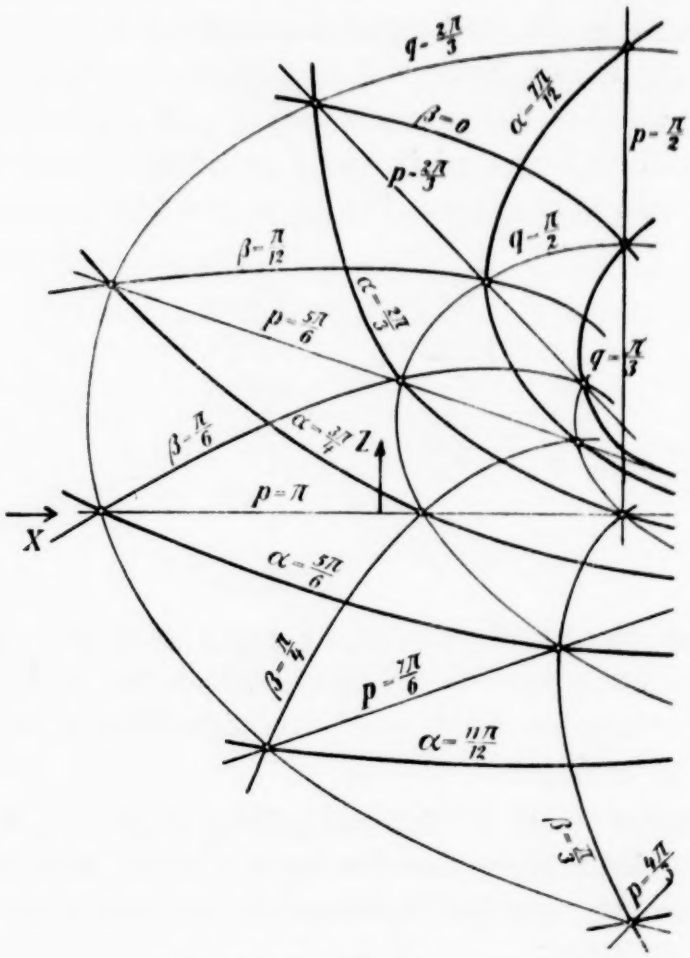

Fig. 8. Das Gewebe α, β.

Daß die Fläche sich sonst noch mehrfach durchsetzt, daß die einzelnen Intervalle (Perioden) ineinander übergreifen, sei hier noch nebenbei erwähnt.

§ 15. Weitere Symmetrieelemente.

Die Beschreibung der Fläche gelingt jedoch nicht vollständig, wenn man — wie bisher — nur die XZ-Projektion betrachtet.

Wir bemerkten schon, daß beim Übergang von $+q$ zu $-q$ und $+U$ zu $-U$ neben einer Translation in der X-Richtung die Y-Koordinate ihr Zeichen wechselt. Dasselbe erkennt man aus der YZ-Projektion der p- und q-Kurven. Dort sieht man ganz deutlich, wie eine Vertauschung des Vorzeichens bei p oder q einer Spiegelung an der Z-Achse — im Raume also an der XZ-Ebene — entspricht (Fig. 6).

Für positives q liegen die Kurven mit ihren Schleifen alle nach der einen, für negatives nach der anderen Seite.

Die Translation in der X-Richtung ist also mit einer Spiegelung an der XZ-Ebene verbunden. Nun ist aber diese Translation infolge der Symmetrieebenen

$$x = x(p, q)_{p = \pi/2\,(1 \pm 2k)} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gleich einer Spiegelung an einer Ebene $x = x(p, q)_{p=k\pi}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Zwei Spiegelungen an zueinander senkrechten Ebenen können durch eine Umklappung um die Schnittgerade der Spiegelebenen ersetzt werden.

Die Fläche besitzt also noch unzählig viele zur Z-Achse parallele Umklappungsachsen an den Stellen

$$\begin{cases} x = x(p, q)_{p=\pm k\pi} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots \\ y = 0. \end{cases}$$

§ 16. Allgemeine Zusammenfassung.

Damit ist unsere Aufgabe erfüllt. Wir haben folgende wesentliche Eigenschaften der Fläche gefunden:

1. Zwei Scharen ebener Kurven ($p = c$, $q = c$), deren Ebenen senkrecht stehen auf je einer Tafelebene und die projizierenden Zylinder der Biegungslinie der Konoidachse einhüllen.
2. Die Biegungslinie der Achse ist als scharfe Kante auf der Fläche enthalten.
3. Periodizität der Fläche längs der X-Achse.
4. Symmetrieebenen, parallel zur YZ-Ebene, an den Stellen $p = \frac{\pi}{2}(1 \pm 2k)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$
5. Umklappungsachsen, parallel zur Z-Achse, an den Stellen $p = \pm k\pi$, für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Die Fläche ist im übrigen abhängig von der Verbiegungskonstanten γ. Den Werten $0 < \gamma < \infty$ entspricht eine stetige Folge von Biegungsflächen, zu denen eine stetige Folge von Evolventenflächen gehört.

Die Grenzlagen $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$ sind erwähnenswert. Für $\gamma = 0$, also $\mathfrak{Cof}\,\gamma = 1$ ist — wie schon im Anfang erwähnt — die Biegungsfläche mit dem hyperbolischen Paraboloid identisch, die Evolventenfläche reduziert sich auf die Konoidachse.

Für $\gamma = \infty$ reduziert sich die Biegungsfläche ganz auf die Kurve $u = 0$, wie aus Gleichung (48) hervorgeht. $u = 0$ wird dabei zur Geraden gestreckt, da nach (6) mit x zugleich auch z verschwindet. Auch da existiert natürlich keine eigentliche Evolventenfläche mehr.

Zum Schluß sei noch ein Wort über die Figuren gesagt. Es liegt ihnen diejenige Fläche zugrunde, die dem Verbiegungsparameter

$$\gamma = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{5}{4} \tag{54}$$

entspricht. Die Kurven wurden mit Hilfe des Tafelwerkes von *Hayashi* und des Rechenschiebers berechnet, auf Millimeterpapier gezeichnet (1 dm als Einheit), durchgepaust und beim Druck im Maßstab 1:2 verkleinert.

Die benutzte Fläche hat die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{3}p - \frac{5}{12}\cos p\,\mathfrak{Sin}\,q$$

$$y = \frac{5}{12}q - \frac{1}{3}\sin p\,\mathfrak{Cof}\,q$$

$$z = -\frac{1}{4}\sin p\,\mathfrak{Sin}\,q.$$

Die XZ-Projektion der Haupttangentenkurven wurde nicht berechnet. Es war von vornherein so eingerichtet, daß p und q in gleichen Intervallen anwachsen, so daß dann einfach in das schon vorhandene p, q-Netz das α, β-Netz der Haupttangentenkurven als Diagonalnetz hineingezeichnet werden konnte.

Literaturangabe:

Neben der erwähnten Abhandlung von *Hans Jonas* wurden lediglich Werke über Differentialgeometrie benutzt, wie *Blaschke*, *Scheffers*, *Bianchi* und die Nachschrift aus der im W.-S. 1923/24 von Herrn Prof. *Lagally* gehaltenen Vorlesung über dasselbe Gebiet.

Eingegangen im Oktober 1927.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie.

Erste Mitteilung.

Von *Erhard Tornier* in Halle [1]).

Inhalt.

Seite

Einleitung.
§ 1. Kritische Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung 178
§ 2. Skizze einer Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung 180
§ 3. Übergang zu Dichtigkeitsfragen 185
§ 4. Bezeichnungen und Grundbegriffe 187
§ 5. Einige spezielle Dichten 189
§ 6. Ergebnisse über die Dichten aus § 5 bei Wachstumsstärken größer als eins 190
§ 7. Beschränkte E-Folgen 193
§ 8. Die Dichten aus § 5, die Funktion $M(x)$ und der allgemeine Dirichletsche Reihensatz in beschränkten E-Folgen 194

Einleitung.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich viele Sachverhalte der asymptotischen Zahlentheorie unter Annahme geeigneter Postulate, wie etwa der „Regellosigkeit" der Primzahlverteilung, wahrscheinlichkeitstheoretisch darstellen lassen; es braucht hier nur an Namen wie *Stäckel* [2]) erinnert zu werden. Dadurch ist eine heuristische Methode zur Beleuchtung von Zusammenhängen und zur Aufstellung von Vermutungen in der asymptotischen Zahlentheorie gegeben.

Auf dies heuristische Prinzip habe ich in einer Note [3]) der Pariser Akademie hingewiesen. Dort habe ich betont, daß der innere Grund dieser Erscheinung wohl nur durch eine *gemeinsame*, resp. gewissermaßen *isomorphe*, *axiomatische* Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie einer Klasse von eigenschaftsbehafteten Folgen — z. B. der natürlichen Zahlenfolge hinsichtlich ihrer Teilbarkeitseigenschaften — aufzudecken sei, und daß auf diese Weise vielleicht die Möglichkeit bestände, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden zum Range legaler Beweismittel in der Zahlentheorie zu erheben. Diese und die folgenden Mitteilungen sollen zeigen, daß die eben genannte Hoffnung wirklich durch Einführung geeigneter Begriffsbildungen erfüllbar ist. Zu diesem Zweck muß zunächst eine einwandfreie Begründung des hier gebrauchten Teils der Theorie der diskontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten gegeben werden [4]).

---

[1]) Bei der Abfassung dieser Arbeit hat mich Herr *H. Hasse* mit einer Reihe wertvoller Hinweise und Ratschläge unterstützt.

[2]) Gött. Nachr. 1896 pp. 292—299: „Über Goldbach's empirisches Theorem."

[3]) Comptes rendus t. 184 pp. 990—992: „Sur des propriétés des nombres premiers, éclaircies par la théorie des probabilités dénombrables."

[4]) Philosophische Fragen werden hier nicht gestreift; auf sie bin ich kurz in einem Aufsatz: „Der Wahrscheinlichkeitsbegriff als Bestandteil des Schemas der Kausalkategorie" eingegangen, der demnächst in den Kant-Studien erscheinen wird.

§ 1. Kritische Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ein Blick auf die gegenwärtigen logischen Schwierigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist lehrreich, um zu zeigen, daß die nachher zu gebende Grundlegung diese Schwierigkeiten vermeidet.

Man kann drei Richtungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorheben:

1. die naive historische Auffassung, die sich logisch und inhaltlich unmittelbar an die Gedanken der Begründer der Theorie, vor allem an *Laplace*, anlehnt. Gegen diese sprechen Paradoxien, wie z. B. das *Petersburger Problem*, über das sich die Anhänger dieser Auffassung selbst nicht einigen können. Ein vergleichender Blick in die hier in Betracht kommenden Arbeiten und Lehrbücher zeigt, daß irgend etwas nicht stimmen kann, und daß die Schwierigkeiten offenbar mangelnder Exaktheit in den Grundbegriffen und Methoden entstammen.

2. die französische Richtung, die unter Führung *Borels* den Wahrscheinlichkeitsbegriff logisch mit dem Maßbegriff in Beziehung setzt und außerdem inhaltlich wichtige neue Gebiete erschließt. In letzterem sieht sie wohl mit ihren Haupterfolg; zu ihr kann man auch die russischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker zählen. Auch bei dieser Richtung liegen nun Paradoxien vor. Herr *Borel* sagt: „Des paradoxes d'un même genre se rencontrent plus fréquemment, qu'on pourrait croire“ [1]), und ich kann nicht finden, daß sein Versuch, die Schuld daran dem Auswahlaxiom zuzuschieben, voll befriedigt. Dies Zugeständnis rechtfertigt jedenfalls die Auffassung, daß es auch hier an einer exakten Grundlegung mangelt [2]).

Für diese beiden Richtungen ist die subjektive, mit dem „Prinzip des mangelnden Grundes“ arbeitende Wahrscheinlichkeitsauffassung wesentlich.

3. die in neuerer Zeit gegebene Grundlegung von Herrn *v. Mises* [3]). Über diese seien mir etwas ausführlichere kritische Bemerkungen gestattet. Einerseits scheint mir nämlich auch diese Theorie in ihrem logischen Aufbau nicht einwandfrei zu sein, andererseits — und deshalb in der Hauptsache muß ich hier näher darauf eingehen — stellt sie die Anwendbarkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden auf innermathematische Objekte, wie Zahlentheorie, in Abrede. Der Fortschritt bei ihr besteht in einer axiomatischen Begründung, deren Axiom (I) die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit in einer merkmalbehafteten Folge einführt.

Wie ich weiter unten noch genauer ausführen werde, ist diese auf dem Grenzwert der relativen Häufigkeit fußende Grundlegung auch für meine über Herrn *v. Mises* hinausgehende Zielstellung durchaus geeignet, und ich möchte sagen, unumgänglich. Neben diesem ersten Axiom, das die Existenz aller Grenzwerte von relativen Häufigkeiten fordert, legt nun Herr *v. Mises* als Axiom (II) zugrunde, daß diese Grenzwerte invariant bleiben sollen beim Ubergang zu Teilfolgen, die „ohne Benutzung der Merkmalunterschiede“ gebildet sind. Merkmalbehaftete Elementfolgen mit diesen beiden Eigenschaften nennt er „Kollektive“. Um den Sinn dieser reichlich unbestimmten Forderung, „ohne Benutzung der Merkmalunterschiede“ näher zu erläutern, führt er dann einige Beispiele an. Insbesondere soll eine „arithmetische Vorschrift“ erlaubtes Auswahlprinzip sein. Schon dieses einfachste Beispiel eines erlaubten Auswahlprinzips scheint mir aber mit einer starken Unbestimmheit belastet, denn in dem Sinne, wie später davon Gebrauch

---

[1]) „Traité du calcul des probabilités“. t. II. fasc. 1. pp. 74—77.

[2]) Übrigens zeigt seine Bestimmung von A_∞ pp. 15—16 die gleichen Mängel.

[3]) Math. Ztschr. Bd. 5: „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Eine ausführliche französische Darstellung findet sich bei *Du Pasquier*: „Calcul des probabilités.“ Kap. VIII.

gemacht wird [1]), sieht Herr *v. Mises* jede „vollständig angebbare" unendliche Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe als durch eine „arithmetische Vorschrift" bestimmbar an. Auf die Zirkelhaftigkeit des hier gebrauchten Begriffs „vollständig angebbar" im Sinne von „endlich definierbar" braucht wohl nicht näher eingegangen zu werden. (Vgl. *Richards* Antinomie der Mengenlehre). Das Ergebnis des auf diesen in sich widerspruchsvollen Begriff gestützten Beweises ist dann die Behauptung, daß sich die „Existenz" von Kollektiven nicht durch eine „analytische Konstruktion" nachweisen läßt, „wie man etwa die Existenz stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen nachweist", sondern daß man sich „mit der abstrakten logischen Existenz begnügen muß, die allein darin liegt, daß sich mit den definierten Begriffen widerspruchsfrei operieren läßt".

Jn derselben Art und Weise, wie der als Beispiel herangezogene Begriff „arithmetische Vorschrift" in dem von Herrn *v. Mises* offensichtlich gebrauchten Sinne „vollständig angebbar = endlich definierbar" widerspruchsvoll ist, ist wohl auch die in dem zweiten Axiom als Auswahlprinzip zugrunde gelegte Forderung „ohne Benutzung der Merkmalunterschiede" widerspruchsvoll. Jedenfalls muß dieser Möglichkeit Raum gegeben werden, so lange nicht diese Forderung, wie man vom mathematischen Standpunkt billigerweise verlangen kann, durch eine positive und widerspruchsfreie Charakterisierung der zugelassenen Auswahlprinzipien präzisiert wird. Hiernach kann dem auf dieser Grundlage basierten Kollektivbegriff zunächst noch nicht einmal die von Herrn *v. Mises* behauptete „logische Existenz" im Sinne von Widerspruchsfreiheit zuerkannt werden, es sei denn, daß Herr *v. Mises* seine Axiomatik präzisiert und durch einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit ergänzt.

Ich glaube aber, daß ein solcher Nachweis gar nicht möglich ist. Im Gegenteil scheinen mir die von Herrn *Borel* eingeführten „nombres entièrement normaux" geeignet zu sein, Widersprüche in dem *v. Mises*schen Axiom (II) zu finden. Ein solcher Widerspruch wird natürlich dann konstatiert sein, wenn ein Kollektiv im *v. Mises*schen Sinne „vollständig angebbar" ist, denn das widerstreitet der von Herrn *v. Mises* auf S. 60 der genannten Abhandlung ausgesprochenen Behauptung. Ich behaupte nun, daß die Dezimalziffernfolge jeder „nombre entièrement normal" ein *v. Mises*sches Kollektiv ist. Diese Zahlen sind nämlich durch eine der folgenden Bedingung gleichwertige Definition erklärt: in ihrer Dezimalbruchentwickelung hat jede Variation k-ter Klasse mit Wiederholungen von k aufeinander folgenden Ziffern die Dichte $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ für jedes k. In etwas anschaulicherer, allerdings nicht mehr exakter Art können sie als die beim Würfeln mit einem „zehnseitigen Würfel" mit den Seitenflächen 0—9 auftretenden Ziffernfolgen erklärt werden. Ich gehe wohl nicht fehl, wenn ich annehme, daß jede durch solches Würfeln entstehende unendliche Versuchsreihe ein Kollektiv im Sinne von Herrn *v. Mises* ist, und daß somit auch den *Borel*schen „nombres entièrement normaux" diese Eigenschaft zugesprochen werden muß. Diese Zahlen erfüllen nun nach *Borel* jedes Intervall der Breite 1 der Zahlengeraden mit dem Maße 1, haben also eine überabzählbare Mächtigkeit [2]). Es besteht nun die begründete Vermutung, auf deren Beweis ich noch zurückzukommen hoffe, daß jede nicht-rationale algebraische Zahl dazu gehört. Ist das bewiesen, so ist die Ziffernfolge

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots$$

„vollständig angebbar", weil durch ein „arithmetisches Gesetz" definiert, und Kollektiv

[1]) Vergl. den Beweis von Satz 5 der in der vorigen Anmerkung genannten Arbeit.

[2]) loc. cit. [S. 178, Anm. 1] p. 3.

im *v. Mises*schem Sinne; durch diese Ausführung ist das Vorhandensein von Widersprüchen in dem Axiom (II) jedenfalls außerordentlich nahegelegt. An dieser These halte ich solange fest, bis mir das Gegenteil nachgewiesen wird. Einen Versuch dazu verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn *v. Mises*. Er zeigt darin, daß die Ziffernfolge der Zahl *e* sicherlich kein Kollektiv ist. Seine Auswahlvorschrift lautet: „Man wähle in der Ziffernfolge von *e* die Ziffern mit den Indizes *n* aus, für die gilt:

$$10^n e^2 - [10^n e^2] < \frac{1}{2}.\text{“}$$

Man überzeugt sich leicht, daß z. B. die Ziffern 2 und 6 in der so gebildeten Teilfolge nie auftreten, der Grenzwert der relativen Häufigkeit dieser Ziffern in der Teilfolge also 0 ist. Dazu ist aber zu sagen, daß man die von Herrn *v. Mises* angegebene Auswahlvorschrift, wenn schon sie nach einem arithmetischen Gesetz erfolgt, doch keinesfalls als eine solche „ohne Benutzung der Merkmalunterschiede“ bezeichnen kann. Im Gegenteil geht ja die *Ziffernfolge* von *e* selbst, d. h. also die Merkmalunterschiede, in die Vorschrift ein.

Wie oben schon hervorgehoben, schließt Herr *v. Mises* bei seiner Grundlegung (p. 65) die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf innermathematische Objekte ausdrücklich aus. In der Tat würde z. B. die Zuteilung der Merkmale 0 und 1 an jede natürliche Zahl, je nachdem sie durch 2 teilbar ist oder nicht, die natürlich dem Axiom (I) mit den Grenzwerten $W_0 = W_1 = 1/2$ genügt, kein Kollektiv in *v. Mises*schem Sinne liefern, weil ja das Axiom (II) nicht erfüllt ist; denn die Auswahl der Teilfolge aller geraden Zahlen verläuft, als eine durch ein „arithmetisches Gesetz“ bestimmte Auswahl „ohne Berücksichtigung der Merkmalunterschiede“, und dennoch entsprechen ihr die Grenzwerte $W_1' = 1$, $W_0' = 0$. In seinen Augen ist nun zwar die Nichtanwendbarkeit seiner Theorie in solchen Fällen kein Schaden, denn seiner Auffassung nach liegt der Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung lediglich darin, einen mathematischen Apparat zur Behandlung von in der Erfahrung gegebenen zufälligen Ereignissen zu liefern. Hat man aber den Wunsch, die Methoden [1]) der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch für die Anwendung auf mathematische Objekte nutzbar zu machen, so wird man sich nach einer andersartigen Grundlegung umsehen müssen, die sich von der *v. Mises*schen dadurch unterscheidet, daß sie einerseits neben den bisherigen Anwendungen solche auf arithmetische Merkmale nicht a priori ausschließt, und die andererseits natürlich allen vom streng mathematischen Standpunkt zu stellenden Exaktheitsansprüchen genügt.

Eine solche Begründung will ich im Folgenden geben.

Ich übernehme dabei den in Axiom (I) von Herrn *v. Mises* enthaltenen Grundgedanken, die Existenz der Grenzwerte der relativen Häufigkeiten zu fordern. Anstelle des logisch anfechtbaren Axioms (II) dagegen stelle ich die Forderung der Gültigkeit des Multiplikationstheorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung für je endlich viele Wahrscheinlichkeiten, das in der *v. Mises*schen Theorie erst mittels des Axioms (II) hergeleitet wird. Allerdings ist dabei der Erfahrungssachverhalt, dessen Abbild meine Axiomatik sein soll, in seiner Struktur von dem von Herrn *v. Mises* benutzten, wie sich gleich zeigen wird, verschieden.

§ 2. Skizze der Grundlegung.

Zur Illustration meiner Axiomatik diene folgendes Bild: Gegeben seien unbeschränkt viele „polyedrische Würfel“ mit bezifferten Seitenflächen. Mit diesen werde eine Folge

[1]) Es handelt sich um die *Methoden*; ob man dann noch von „Wahrscheinlichkeit“ spricht, oder Herrn *v. Mises* entgegenkommend hier lieber das Wort „Dichte“ verwendet, ist nur eine Frage der Bezeichnung.

von Versuchsreihen angestellt, derart, daß in jeder Versuchsreihe der Reihe nach mit dem 1-ten, 2-ten, ... Würfel gewürfelt wird. Die Ergebnisse der Würfe werden in den Gitterpunkten des ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems angeschrieben, wobei als Abszisse die Nummer der Versuchsreihe, als Ordinate die Nummer des Versuchs in der Versuchsreihe genommen werden soll. Die einzelnen Versuchsreihen werden durch ein Leersymbol zu unendlichen Folgen gemacht. Betrachtet werden dann die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der i-te Wurf (also der mit dem i-ten Würfel ausgeführte) einer Versuchsreihe ein vorgeschriebenes Ergebnis E hat. Diese Wahrscheinlichkeiten werden durch die Häufigkeit des Vorkommens von E in der i-ten Zeile des gewonnenen graphischen Schemas bestimmt. Betrachtet man ferner eine Anzahl von Zeilen mit den Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ und fragt, wie oft es vorkommt, daß in ihnen ν vorgeschriebene Versuchsergebnisse $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ in derselben Spalte stehen, d. h. anders ausgedrückt, in welchen Versuchsreihen gleichzeitig der i_1-te Wurf das Ergebnis $E_1, \ldots$, der i_ν-te Wurf das Ergebnis E_ν hat, so kommt das auf das Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinaus.

Allgemein definiere ich nun den abstrakten Begriff „*Wahrscheinlichkeitsfeld*“ folgendermaßen:

Definition 1.

Gegeben sei eine Menge von mindestens zwei und höchstens abzählbar unendlich vielen „Ereignissen“ E. Aus diesen sei irgendeine unendliche Matrix $(E_k^{(i)})$ zusammengestellt, wobei man, um bei obigem Bild zu bleiben, (k, i), $(i, k = 1, 2, \ldots, \infty)$, als Gitterpunkt des ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems, den Spaltenindex k als Nummer der Versuchsreihe, den Zeilenindex i als Nummer des Versuchs in der Versuchsreihe, deuten möge. $(E_k^{(i)})$ heißt Wahrscheinlichkeitsfeld, wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

(I) Ist E irgendeines der Ereignisse und bezeichnet $R_k^{(i)}(E)$ die relative Häufigkeit des Vorkommens des Ereignisses E unter den $E_k^{(i)}$ der i-ten Zeile bis zur k-ten Spalte hin, d. h. den Quotienten der entsprechenden Anzahl durch k, so existiert für jedes i

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i)}(E^{(i)}) = w^{(i)}(E).$$

(II) Sind $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ irgendwelche ν (nicht notwendig verschiedene) Ereignisse und $i_1, \ldots, i_\nu$ irgendwelche ν verschiedene Zeilen und bezeichnet

$$R_k^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(E_1, \ldots, E_\nu)$$

die relative Häufigkeit des gleichzeitigen Vorkommens von E_1 in der i_1-ten, ..., bis E_ν in der i_ν-ten Zeile bis zur k-ten Spalte hin, so existiert wieder der Grenzwert für $k \to \infty$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(E_1, \ldots, E_\nu) = \prod_{\lambda=1}^{\nu} w^{(i_\lambda)}(E_\lambda).$$

(III) In jeder Spalte finden sich nur *endlich viele verschiedene* Ereignisse und nur eines von diesen kommt in der betreffenden Spalte unendlich oft vor. Dies letztere Ereignis ist in allen Spalten dasselbe. Es heißt das „*Leerereignis*“ E_∞.

Die $w^{(\lambda)}(E)$ und ihre in (II) auftretenden Produkte nenne ich „*Wahrscheinlichkeiten*“.

Axiom (III) dient nur zur Vermeidung von Schwerfälligkeiten. Man sieht nämlich sofort, daß in einem Feld, das den Axiomen (I) und (II) genügt, in jeder Zeile endlich viele Elemente beliebig abgeändert werden können, ohne daß die Wahrscheinlichkeiten

sich ändern. Daher kann man insbesondere, wenn nur die Axiome (I) und (II) erfüllt sind, in der i-ten Zeile die i ersten Ereignisse durch ein neues Ereignis E_∞ ersetzen, gleichzeitig für jedes i, ohne daß an dem durch die Axiome (I) und (II) ausgedrückten Tatbestand und an den Zahlenwerten der Wahrscheinlichkeiten etwas geändert wird. Nach dieser Abänderung ist aber dann das Axiom (III) ersichtlich erfüllt. Deshalb kann man die Struktureigenschaften der durch (I) und (II) erklärten Felder voll ergründen, auch wenn man noch (III) fordert.

Aus diesen Axiomen lassen sich alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Sätze über Wahrscheinlichkeiten in solchen Wahrscheinlichkeitsfeldern ablesen. Die Beweise laufen völlig zu den üblichen parallel, deshalb brauche ich hier nicht darauf einzugehen. Ich hebe speziell hervor, daß die Gültigkeit des Additionstheorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung für *endlich viele* einander ausschließende (d. h. also hier für verschiedene) Ereignisse eine unmittelbare Folge von Axiom (I) und der Existenzforderung von Axiom (II) ist. Sind nämlich $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ ν verschiedene Zeilen und

$$\mathfrak{E}_1 = (E_{11}, \ldots, E_{1\nu}),\ \mathfrak{E}_2 = (E_{21}, \ldots, E_{2\nu}), \ldots,\ \mathfrak{E}_\mu = (E_{\mu 1}, \ldots, E_{\mu\nu})$$

μ verschiedene Ereignissysteme, so ist die relative Häufigkeit des Vorkommens in ein- und derselben Spalte $\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ von $\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mu$ [1]) in den Zeilen $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ ersichtlich

$$R_k^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mu) = R_k^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_1) + \cdots + R_k^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_\mu).$$

Folglich gilt für die nach den Axiomen vorhandenen Grenzwerte (Wahrscheinlichkeiten) die Additionsregel:

$$w^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_\mu) = w^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_1) + \cdots + w^{(i_1, \ldots, i_\nu)}(\mathfrak{E}_\mu).$$

Der Multiplikationssatz für *endlich viele* Wahrscheinlichkeiten ist bereits durch die zweite Forderung des Axioms (II) sichergestellt.

Ich möchte hier übrigens die folgende rein arithmetische Fragestellung hervorheben. Wenn ein Wahrscheinlichkeitsfeld $(E_k^{(i)})$ gegeben ist und $E_l\,(l = 1, 2, 3, \ldots)$ die irgendwie geordnete Folge aller in ihm auftretenden Ereignisse ist, so läßt sich die ihm zugeordnete „*Belegungsmatrix*“ $(w^{(i)}(E_l))$, $(i, l = 1, 2, \ldots)$ bilden. Diese hat die Eigenschaft, daß alle Zeilensummen Relationen

$$0 \leqq \sum_{l=1}^{\infty} w^{(i)}(E_l) \leqq 1\ ^{2})$$

genügen. Die Frage ist nun, ob sich umgekehrt zu jeder Matrix aus reellen Zahlen $(w_l^{(i)})$ mit $0 \leqq w_l^{(i)} \leqq 1$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld angeben läßt, so daß $(w_l^{(i)}) = (w^{(i)}(E_l))$ für alle i und l gilt. Diese Frage ist zu bejahen, wie in einer demnächst erscheinenden Arbeit gezeigt werden wird.

Ich zeige nun durch Angabe eines Beispiels, daß es Wahrscheinlichkeitsfelder gibt, d. h. daß meine Axiome (I)—(III) widerspruchsfrei sind.

Es sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine Folge von verschiedenen Primzahlen. Dann werde das Element $E_k^{(i)}$ eines Feldes definiert als der genaue Exponent, zu dem die Primzahl p_i in der Zahl k aufgeht. Es sei nun E eines dieser Ereignisse, d. h. also Zeichen für den genauen Exponenten ε, zu dem eine Primzahl der Folge in einer Zahl aufgeht, dann ist, wie man leicht sieht,

---

[1]) $\vee$ lies „oder“.

[2]) Bricht die Folge $E_1, E_2, \ldots$ mit E_L ab, so ist stets $\sum_{l=1}^{L} w^{(i)}(E_l) = 1$.

$$R_k^{(i)}(E) = \frac{1}{k}\left\{\left[\frac{k}{p_i^{e}}\right] - \left[\frac{k}{p_i^{e+1}}\right]\right\},$$

und folglich existiert in der Tat

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i)}(E) = \frac{1}{p_i^{e}} - \frac{1}{p_i^{e+1}}$$

für jedes i.

Sind ferner $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ ν (nicht notwendig verschiedene) Ereignisse, d. h. Exponenten, und $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_\nu}$ ν verschiedene Primzahlen, so ist die relative Häufigkeit der Zahlen bis k, die *genau* durch $P = p_{i_1}^{e_1} \cdot p_{i_2}^{e_2} \cdots p_{i_\nu}^{e_\nu}$ teilbar sind, leicht mit Hilfe der Überlegung abzuschätzen, daß ihre Anzahl A mit der Anzahl derjenigen Zahlen bis $\frac{k}{P} = Q$ übereinstimmt, die zu P prim sind. Es ist also

$$\left[\frac{Q}{P}\right] \cdot \varphi(P) \leqq A < \left\{\left[\frac{Q}{P}\right] + 1\right\} \cdot \varphi(P),$$

demnach

$$\frac{1}{k}\left[\frac{k}{P^2}\right] \cdot \varphi(P) \leqq R_k^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(E_1, \ldots, E_\nu) < \frac{1}{k}\left\{\left[\frac{k}{P^2}\right] + 1\right\} \cdot \varphi(P).$$

Daraus ergibt sich sofort die Existenz des Grenzwertes und die Gleichungen

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(E_1, \ldots, E_\nu) = \frac{\varphi(P)}{P^2} = \prod_{\lambda=1}^{\nu}\left(\frac{1}{p_{i_\lambda}^{e_\lambda}} - \frac{1}{p_{i_\lambda}^{e_\lambda+1}}\right) = \prod_{\lambda=1}^{\nu} \lim_{k\to\infty} R_k^{(i_\lambda)}(E_\lambda).$$

Da also in dem hier definierten Feld die Axiome (I)—(III) erfüllt sind, liegt ein Wahrscheinlichkeitsfeld vor. Dieses Beispiel zeigt zugleich, in welcher Art meine Grundlegung auf arithmetische Fragen anwendbar ist. Die nähere Ausführung folgt dann in § 3.

Wie aus den vorhergehenden Ausführungen zu entnehmen ist, läuft die Frage nach der Gültigkeit des Additions- und Multiplikationstheorems für *unendlich viele* Wahrscheinlichkeiten beide Male auf die Erlaubtheit einer Grenzwertvertauschung hinaus. Das sei etwa an dem folgenden einfachsten Typus des Additionstheorems erläutert.

Ist $E_1, E_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Ereignissen mit den relativen Häufigkeiten

$$R_k^{(i)}(E_1), \quad R_k^{(i)}(E_2), \ldots$$

ihres Auftretens in einer festen Zeile i und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

$$\lim_{k\to\infty} R_k^{(i)}(E_1) = w^{(i)}(E_1), \ldots,$$

so ist für das Auftreten von $E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee \ldots$ in der i-ten Zeile die für jedes k bei einem festen Index l_k abbrechende Summe

$$\sum_{l=1}^{\infty} R_k^{(i)}(E) = R_k^{(i)}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots)$$

die relative Häufigkeit, so daß sinngemäß

$$w^{(i)}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots) = \lim_{k\to\infty} R_k^{(i)}(E_1 \vee E_2 \vee \ldots) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} R_k^{(i)}(E_l) = \sum_{l=1}^{\infty} w^{(i)}(E_l)$$

als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $E_1 \vee E_2 \vee \ldots$ zu bezeichnen wäre.

Aus den Axiomen folgt aber ohne eine geeignete Annahme natürlich weder die Existenz dieses Grenzwertes, noch im Falle der Existenz die obige Gleichung. Auf der Anwendung solcher unerlaubter Grenzübergänge beruhen alle Paradoxien der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie. Es sei dies an dem bekannten Beispiel des *Petersburger Problems* erläutert.

Ich muß dazu vorerst meiner Axiomatik noch den Begriff „*mathematischer Wert*" einordnen. Das geschieht durch folgende Definition:

Definition 2.

In einem Wahrscheinlichkeitsfeld, das aus *endlich vielen* Ereignissen E aufgebaut ist, sei dem gleichzeitigen Eintreffen eines Ereignisses E_1 in der 1-ten, . . ., eines Ereignisses E_ν in der ν-ten Zeile irgendwie eine reelle Zahl $a(E_1, \ldots, E_\nu)$ als „Prämie" zugeordnet. Dann sei der nach den Axiomen sicher vorhandene Grenzwert

$$A = \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} a(E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\nu})\, R_k^{(1,\ldots,\nu)}(E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\nu}) = \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} a(E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\nu})\, w^{(1,\ldots,\nu)}(E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\nu}),$$

wo $\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ alle Variationen ν-ter Klasse mit Wiederholungen (der Ereignisse) durchläuft, der zugehörige „*mathematische Wert*".

Zur Einordnung in die geläufige Definition dieses Begriffs mag man die verschiedenen Möglichkeiten für die Besetzung der Zeilen 1, . . ., ν in einer Spalte k mit den Ereignissen $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\nu}$ als verschiedene Möglichkeiten des Verlaufs eines aus ν Einzelversuchen bestehenden Glücksspiels deuten. Wesentlich dafür, daß diese Definition auf Grund meiner Axiome ohne weitere Grenzwertvoraussetzungen möglich ist, ist dabei neben der Endlichkeit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Einzelversuchsergebnisse E auch die Beschränktheit der „Spiellänge" ν. Die Definition ist also nicht ohne weiteres übertragbar auf Fälle, wo die Länge ν_k des k-ten Spiels jede Grenze überschreiten kann. Das letztere ist nun aber gerade der Fall, wenn man das dem Petersburger Problem zugrunde liegende Spiel in der obigen Weise formalisieren will. Man hat dann ein Wahrscheinlichkeitsfeld aus nur zwei Ereignissen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}$ (Schrift und Wappen). Das Erfülltsein von Axiom (I) fordert, daß dabei in jeder Zeile die Zeichen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}$ asymptotisch gleich oft auftreten, wenn man Gleichberechtigung beider Münzseiten voraussetzt. Es gilt also:

$$w^{(i)}(\mathfrak{S}) = w^{(i)}(\mathfrak{W}) = \frac{1}{2} \quad \text{für jedes } i.$$

Ferner verlangt das Erfülltsein von Axiom (II), daß in jeder Zeilenkombination $i_1, \ldots, i_\nu$ jede vorgeschriebene ν-gliedrige Variation $\mathfrak{V}_\nu$ aus den Zeichen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}$ mit der Dichte (Wahrscheinlichkeit)

$$w^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(\mathfrak{V}_\nu) = \frac{1}{2^\nu}$$

auftritt. Der Vorschrift des Problems entsprechend müssen wir hier die Prämien a für beliebig lange Spiele erklären und zwar durch die Festsetzung $a(\mathfrak{V}^{(\nu)}) = 2^\nu$, wenn $\mathfrak{V}^{(\nu)}$ eine unendlichgliedrige Variation aus den Zeichen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{W}$ ist, bei der das Zeichen $\mathfrak{W}$ zuerst an ν-ter Stelle auftritt. Daneben erklären wir der Vollständigkeit halber noch die spezielle Prämie $a(\mathfrak{V}^{(\infty)}) = a(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}, \ldots)$ als irgend eine reelle Zahl.

In Analogie zu der obigen Definition wäre dann der mathematische Wert durch

$$A = \lim_{k\to\infty} \sum_{\mathfrak{V}^{(\nu)}} a(\mathfrak{V}^{(\nu)})\, R_k^{(1,\ldots,\nu)}(\mathfrak{V}^{(\nu)})$$

zu erklären; dabei soll die Summation über $\mathfrak{V}^{(\nu)}$ bedeuten, daß für jedes ν irgend eine bestimmte der oben beschriebenen Variationen $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{\nu-1}, \mathfrak{W}_\nu, \ldots)$ ausgewählt wird. Daher ist

$$A = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu R_k^{(1,\ldots,\nu)}(\mathfrak{V}^{(\nu)}).$$

Jetzt steht aber auf Grund der Axiome weder fest, ob dieser Grenzwert vorhanden ist, noch ob überdies die von der klassischen Theorie geforderte Gleichheit mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} \lim_{k \to \infty} R_k^{(1, \ldots, \nu)}(\mathfrak{B}^{(\nu)}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} \cdot \frac{1}{2^{\nu}} = +\infty$$

gilt, die dann das Paradoxon des unendlich hohen Einsatzes ergibt.

Es sei noch bemerkt, daß auch, wenn das Ergebnis solcher unerlaubter Grenzprozesse nicht gerade ∞ ist, (z. B. wenn man beim Petersburger Problem $a(\mathfrak{B}^{(\nu)}) = (1{,}999)^{\nu}$ setzt), es deshalb doch nicht ohne weiteres als Wahrscheinlichkeit resp. mathematischer Wert in exaktem Sinne anzusehen ist [1]).

Eine Einengung des Begriffs Wahrscheinlichkeitsfeld dahin, daß die Existenz und Vertauschbarkeit für alle solche Grenzwerte bei beliebigen Prämien gefordert wird, kommt natürlich nicht in Frage, denn dann würde es überhaupt keine Realisierungen dieses Begriffs mehr geben, abgesehen von trivialen Fällen, in denen das Wahrscheinlichkeitsfeld nur in endlich vielen Zeilen endlich viele Ereignisse mit von 0 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten aufweist [2]).

§ 3. Übergang zu Dichtigkeitsfragen.

Zur näheren Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsfelder ordnen wir irgendwie die Ereignisse jeder Zeile und definieren:

Definition 3.

Wir reden von einer „*Ordnung*" eines Wahrscheinlichkeitsfeldes, wenn für jede einzelne Zeile die in ihr vorkommenden verschiedenen Ereignisse in irgend einer Reihenfolge numeriert sind. Diese Numerierung ist für die verschiedenen Zeilen ganz unabhängig voneinander zugelassen, nur soll das Leerereignis stets den Index 0 erhalten und, falls es in einer Zeile nicht vorkommt, ebenfalls den dann von 1 an numerierten Elementen dieser Zeile mit dem Index 0 voranstehend gedacht werden.

Auf Grund dieses Begriffs „Ordnung" definieren wir ferner:

Definition 4.

Die k-te Spalte eines Wahrscheinlichkeitsfeldes, dem eine bestimmte „Ordnung" aufgeprägt ist, heißt durch e_i^{α}, die „*α-te Potenz der i-ten Eigenschaft*" teilbar, wenn der Gitterpunkt (k, i) mit einem Ereignis belegt ist, dem in der i-ten Zeile mindestens der Index α zukommt. Sind ferner $i_1, \ldots, i_\nu$ ν verschiedene und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ν nicht notwendig verschiedene natürliche Zahlen, so wird die Teilbarkeit der k-ten Spalte durch das „Produkt" $\prod_{\lambda=1}^{\nu} e_{i_\lambda}^{\alpha_\lambda}$ der i_λ-ten Eigenschaften in α_λ-ter Potenz $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$ entsprechend erklärt. Bezeichnungen, wie „genau durch e_i^{α} teilbar", „höchstens durch e_i^{α} teilbar" usw., werden der Terminologie der elementaren Arithmetik entsprechend, sinngemäß angewandt.

Um die weitere Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsfelder mit der Untersuchung von zahlentheoretischen und allgemeinen Dichtigkeitsfragen zu verbinden, beweise ich folgenden Satz:

Satz 1.

Die Axiome (I)—(III) aus § 2 sind gleichwertig mit folgenden drei Axiomen:

---

[1]) Selbst wenn alle $a = 1$ gesetzt werden, so daß es sich um eine relative Häufigkeit in früherem Sinne handelt, steht nicht fest, ob der Grenzwert existiert und wenn, ob er gleich 1 ist.

[2]) Welche Beschränkungen man den Prämien auferlegen muß, damit eine solche Forderung Sinn hat, und daß man ferner auch noch die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge für Selektionssysteme (Vergl. Def. 6, 7) fordern kann, werde ich in einer ausführlichen Arbeit über die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigen.

(A) Für jedes i und α existiert der Grenzwert $w(e_i^\alpha)$ der relativen Häufigkeit der Spalten, die durch e_i^α teilbar sind.

(B) Für je *endlich viele* verschiedene $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ und nicht notwendig verschiedene $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ existiert der Grenzwert $w(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot e_{i_\nu}^{\alpha_\nu})$ der relativen Häufigkeit der Spalten, die durch $\overset{\nu}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} e_{i_\lambda}^{\alpha_\lambda}$ teilbar sind, und es gilt

$$w(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot e_{i_\nu}^{\alpha_\nu}) = \overset{\nu}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} w(e_{i_\lambda}^{\alpha_\lambda}) .$$

(C) Jede Spalte ist nur durch *endlich viele* Eigenschaftspotenzen e_i^α mit $\alpha \neq 0$ teilbar.

Beweis: Das Axiom (I) aus § 2 fordert die Existenz des Grenzwertes $w'(e_i^\alpha)$ der relativen Häufigkeit der *genau* durch e_i^α teilbaren Spalten, für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

Aus der Gleichung

$$w(e_i^\alpha) = 1 - w'(e_i^0) - w'(e_i^1) - \cdots - w'(e_i^{\alpha-1})$$

folgt nun die Existenz der $w(e_i^\alpha)$. (A) folgt also aus (I). Umgekehrt ergibt sich aber durch dieselbe Gleichung aus der Existenz der $w(e_i^\alpha)$ sukzessive die Existenz der $w'(e_i^\alpha)$. Damit ist die Äquivalenz von (I) und (A) gesichert.

Die Äquivalenz von (II) und (B) will ich für $\nu = 2$ zeigen. Allgemein folgt sie dann leicht durch vollständige Induktion.

Durch Rückgang zu den relativen Häufigkeiten erkennt man sofort die Gültigkeit folgender Gleichungen:

1. $w'(e_{i_1}^{\alpha_1}) = w(e_{i_1}^{\alpha_1}) - w(e_{i_1}^{\alpha_1+1})$.
2. $w'(e_{i_2}^{\alpha_2}) = w(e_{i_2}^{\alpha_2}) - w(e_{i_2}^{\alpha_2+1})$.
3. $w'(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2}) = w(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2}) - w(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2+1}) - w(e_{i_1}^{\alpha_1+1} e_{i_2}^{\alpha_2}) + w(e_{i_1}^{\alpha_1+1} e_{i_2}^{\alpha_2+1})$
$= \{w(e_{i_1}^{\alpha_1}) - w(e_{i_1}^{\alpha_1+1})\} \cdot \{w(e_{i_2}^{\alpha_2}) - w(e_{i_2}^{\alpha_2+1})\} = w'(e_{i_1}^{\alpha_1}) \cdot w'(e_{i_2}^{\alpha_2})$.

Aus (B) folgt also (II). Aber es gilt auch das Umgekehrte, da offensichtlich folgende Gleichung besteht:

$$w(e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2}) = 1 - \sum_{\varrho_1=0}^{\alpha_1-1} w'(e_{i_1}^{\varrho_1}) - \sum_{\varrho_2=0}^{\alpha_2-1} w'(e_{i_2}^{\varrho_2}) + \sum_{\substack{\varrho_1=0,1,\ldots,(\alpha_1-1) \\ \varrho_2=0,1,\ldots,(\alpha_2-1)}} w'(e_{i_2}^{\varrho_2} e_{i_2}^{\varrho_2})$$

$$= \{1 - \sum_{\varrho_1=0}^{\alpha_1-1} w'(e_{i_1}^{\varrho_1})\} \cdot \{1 - \sum_{\varrho_2=0}^{\alpha_2-1} w'(e_{i_2}^{\varrho_2})\} = w(e_{i_1}^{\alpha_1}) \cdot w(e_{i_2}^{\alpha_2}) .$$

Die Gleichwertigkeit von (C) und (III) endlich ist bei Beachtung von Definition 3 trivial.

Nach diesen Vorbereitungen will ich für den Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes mit „Ordnung" einen völlig gleichwertigen geben, der nur den Vorteil hat, bei arithmetischen Untersuchungen der sonst üblichen Ausdrucksweise näher zu stehen.

Es sei $\mathsf{E} = (e)$ ein System von höchstens abzählbar unendlich vielen nicht näher definierten „*Eigenschaften*" und $\mathsf{H} = \mathsf{H}(\mathsf{E})$ die Gesamtheit aller endlichen Kombinationen mit Wiederholung von Eigenschaften aus E. Außerdem soll sich in H auch eine kein Element von E enthaltende „*Leerkombination*" befinden.

Ich betrachte nun eine unendliche Folge

$$F = (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

deren jedes Element mit einer bestimmten Kombination aus H belegt ist, wobei beliebig vielen *a dieselbe* Kombination zukommen darf.

Kommt einem Element a_k die Kombination

$$\mathfrak{C} = (e_1\,(\alpha_1^{(k)}\text{-mal}), \ldots, e_\nu\,(\alpha_\nu^{(k)}\text{-mal}))$$

zu, so nenne ich die Vielfachheiten $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_\nu^{(k)}$ auch die „Exponenten" dieser Kombination, schreibe demgemäß

$$\mathfrak{C} = e_1^{\alpha_1^{(k)}}\, e_2^{\alpha_2^{(k)}} \cdot \ldots \cdot e_\nu^{\alpha_\nu^{(k)}},$$

sage a_k sei aus diesen Eigenschaftspotenzen zusammengesetzt und wende die Terminologie der elementaren Arithmetik (teilbar durch e^α, genau teilbar durch e^α usw.) sinngemäß an.

Ich definiere nun wie folgt:

Definition 5.

Eine in der genannten Art eigenschaftsbehaftete Folge F heißt „E-*Folge*", wenn

1. $\lim\limits_{k\to\infty} R_k(e_i^\alpha) = w_i^{(\alpha)}$ für jedes i und k existiert,
2. $\lim\limits_{k\to\infty} R_k(\mathfrak{C}) = w(\mathfrak{C}) = \prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} w_{i_\lambda}^{(\alpha_\lambda)}$ gilt, für alle $\mathfrak{C}$,

die von der Leerkombination verschieden sind. Hier bedeutet $R_k(\mathfrak{C})$ die relative Häufigkeit der Elemente in F bis a_k inkl., die durch $\mathfrak{C} = \prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} e_{i_\lambda}^{\alpha_\lambda}$ teilbar sind.

Es ist unmittelbar klar, daß diese Definition mit der des „Wahrscheinlichkeitsfeldes mit Ordnung" übereinstimmt, wenn man die k-te Spalte des Feldes mit dem Element a_k der E-Folge identifiziert, wobei speziell den event. vorhandenen mit der Leerkombination belegten Elementen der E-Folge Spalten entsprechen sollen, die durch überhaupt keine Eigenschaft in erster Potenz teilbar sind.

Auf Grund dieses Tatbestandes lassen sich alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Sätze über E-Folgen verwandeln und umgekehrt, durch folgende Zuordnungsmethode:

Isomorphieprinzip:

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element der E*-Folge genau durch* e_i^α *teilbar ist, läßt sich umkehrbar eindeutig der Wahrscheinlichkeit zuordnen, daß im* i*-ten Versuch einer Versuchsreihe das* α*-te der im* i*-ten Versuch möglichen Ereignisse eintritt.*

Alle nun folgenden Sätze sollen als Sätze über E-Folgen F ausgesprochen werden, da sich nach dem eben Gesagten ihre Formulierung als Wahrscheinlichkeitssätze erübrigt.

§ 4. Bezeichnungen und Grundbegriffe.

1. φ: Teilfolge von F.
2. $R_k(\varphi)$: relative Häufigkeit der Elemente von φ in der E-Folge F bis a_k inkl.
3. $(\varphi, a_k) = a_k$ resp. $(\varphi, a_k) = 1$, je nachdem a_k in φ vorkommt oder nicht.
4. E_n: Menge der n ersten Eigenschaften [1]); $\mathsf{E}_\infty = \mathsf{E}$; E': Teilmenge von E; $\mathsf{E} - \mathsf{E}_n = \overline{\mathsf{E}}_n$.
5. $(\mathsf{E}', a_k) = 1$, wenn a_k keine Eigenschaft aus E' hat.
6. $\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi}_n$: Teilfolge derjenigen Elemente von F, denen von den n ersten Eigenschaften zukommen:

   (a) genau ν verschiedene ..... $(\mathfrak{z}) = (\nu)$,
   (b) höchstens ν verschiedene ..... $(\mathfrak{z}) = (\leqq \nu)$,
   (c) genau eine gerade Anzahl verschiedene ..... $(\mathfrak{z}) = (\Sigma 2\nu)$,
   (d) genau eine ungerade Anzahl verschiedene ..... $(\mathfrak{z}) = (\Sigma(2\nu+1))$.

[1]) Die höchstens abzählbar unendlich vielen Eigenschaften werden irgendwie aber fest geordnet vorausgesetzt.

(a'), (b'), (c'), (d'): wie bei (a), (b), (c), (d) aber jede Eigenschaft nur einfach (d. h. nur in der ersten Potenz):

$$(\mathfrak{z}) = (\nu)', \quad (\mathfrak{z}) = (\leqq \nu)', \quad (\mathfrak{z}) = (\Sigma 2\nu)', \quad (\mathfrak{z}) = (\Sigma(2\nu+1))'.$$

Definition 6.

Eine Folge von Teilfolgen aus F

$$\Phi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

heißt „E-*Selektionssystem*", wenn die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu jedem n existiert ein $m_0 = m_0(n)$, derart, daß für alle k und alle $m \geqq m_0(n)$ aus $(\bar{\mathsf{E}}_n, a_k) = 1$ folgt: $(\varphi_{m_0}, a_k) = (\varphi_m, a_k)$.

2. Für jedes n existiert

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_n) = W(\varphi_n).$$

Die Bedingung 1. bedeutet ausführlicher gesagt folgendes: Denkt man sich die Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ untereinander geschrieben, so daß Elemente a mit gleichem Index (in der ursprünglichen Folge gerechnet) untereinander stehen, also die k-te Spalte an gewissen Plätzen mit einem und demselben Element a_k belegt ist, so ist diese k-te Spalte vom m_0-ten Platz an entweder *überall* besetzt oder *überall* frei, wenn a_k nur aus den Eigenschaften $e_1, e_2, \ldots, e_n$ zusammengesetzt ist. Da jedes a_k nach unserer Grundannahme nur aus endlich vielen e_i zusammengesetzt ist, trifft ein solches Verhalten für jede Spalte k zu. Achtet man hierbei insbesondere auf diejenigen Spalten, die von einer Stelle an *überall* besetzt sind, so gelangt man zu folgendem Begriff:

Definition 7.

Die Teilfolge der Elemente a_k aus F, die *fast allen* [1]) Folgen φ_n eines Selektionssystems $\Phi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ angehören, heißt dessen „*Grenzfolge*". Bezeichnung: φ_∞.

Zur Veranschaulichung dieser Begriffe wähle man z. B. für F die natürliche Zahlenfolge, für E die irgendwie, etwa der Größe nach, geordnete Folge der Primzahlen und belege F mit den Primzahlpotenzprodukten gemäß dem Fundamentalsatz der Arithmetik. φ_n sei die Folge der ganzen Zahlen, die von den n ersten Primzahlen genau eine und diese nur in erster Potenz enthalten. Dann ist offenbar für $\Phi = \{\varphi_n\}$ die Bedingung 1. erfüllt. Falls auch noch die Bedingung 2. gilt, was wir später tatsächlich zeigen werden, ist also Φ Selektionssystem, und φ_∞ ist die Reihe der Primzahlen.

Allgemein sieht man sofort, daß für $\Phi = \{\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_n}\}$ in allen 8 Bedeutungen von 6. dieses Paragraphen die Bedingung 1. erfüllt ist. Wie wir später (§ 5) zeigen werden, ist auch hier stets die Bedingung 2. erfüllt, so daß alle diese Φ Selektionssysteme sind [2]).

Als letzten Begriff führen wir die „*Wachstumsstärke*" eines Eigenschaftssystems E ein.

Definition 8.

Die ganze Zahl $\sigma = \sigma(\mathsf{E}, F)$ heißt „*Wachstumsstärke*" von E in der Folge F, wenn σ die kleinste positive ganze Zahl ist, für die $\sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(\sigma)}$ konvergiert. Gibt es eine solche Zahl nicht, so sagen wir, E hat die Wachstumsstärke ∞.

Die Wachstumsstärke ist also speziell dann und nur dann 1, wenn schon $\sum_{i=1}^{\infty} w_i^{(1)}$ konvergiert [3]).

---

[1]) Ich gebrauche „fast alle" durchweg im Sinne von „bis auf endlich viele".

[2]) Die Reichweite dieses Begriffs erklärt sich daraus, daß inbezug auf eine abzählbar unendliche Menge von Eigenschaften die Feststellung derjenigen Elemente einer mit diesen Eigenschaften belegten Menge, denen bestimmte transfinit definierte „Eigenschaftsgruppen" zukommen, ein transfinites Verfahren erfordert, und daß die Forderung 1. gerade den logischen Grenzprozeß dieses Verfahrens wiedergibt.

[3]) Die Wachstumsstärke ist zwar für jede E-Folge also für jedes Wahrscheinlichkeitsfeld mit

§ 5. Einige spezielle Dichten.

Ist $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ eine beliebige der $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen ν-ter Klasse der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so soll durch

$$\prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)} (1 - w_i^{(1)})$$

das Produkt bezeichnet werden, das aus $\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)})$ durch Streichung derjenigen Faktoren entsteht, in denen $w^{(1)}$ die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ hat.

Mit den Bezeichnungen von § 4, 6. ist nach dem Isomorphieprinzip:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_\nu} \{(w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(1)}, \ldots w_{i_\nu}^{(1)}) \prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)} (1 - w_i^{(1)})\}$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu}(1 - w_i^{(1)}) \{\sum_{i_1,\ldots,i_\nu} u_{i_1} u_{i_2}, \ldots, u_{i_\nu}\},$$

wo die Summe über alle $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ zu erstrecken ist und $u_{i_\lambda} = \dfrac{w_{i_\lambda}}{1 - w_{i_\lambda}}$ ist. Durch Addition folgt:

$$\text{(c)} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma 2\nu)}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)}) \{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{i_1,\ldots,i_{2\nu}} u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_{2\nu}}\}.$$

Analog erhält man:

$$\text{(d)}_1 \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)}) \{\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{i_1,\ldots,i_{2\nu+1}} u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_{2\nu+1}}\}.$$

Durch elementare Umformungen ergibt sich:

$$\text{(c)} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma 2\nu)}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)}) \frac{1}{2} \{\prod_{i=1}^{n}(1 + u_i) + \prod_{i=1}^{n}(1 - u_i)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 + \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)})\},$$

und entsprechend

$$\text{(d)} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\{1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)})\}.$$

Daher ist

$$\text{(e)} \qquad W(\overset{(\Sigma 2\nu)}{\varphi_n}) - W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)}).$$

Mit Hilfe des Isomorphieprinzips ergibt sich ferner:

$$\text{(a')} \qquad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = \sum_{i_1,\ldots,i_\nu} \{(w_{i_1}^{(1)} - w_{i_1}^{(2)}) \cdots (w_{i_\nu}^{(1)} - w_{i_\nu}^{(2)}) \prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)} (1 - w_i^{(1)})\}$$

$$\overset{\times}{=} \prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)}) \sum_{i_1,\ldots,i_\nu} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(1)} \cdots w_{i_\nu}^{(1)\ 1}).$$

Hieraus folgt entsprechend wie oben:

„Ordnung" eindeutig festgelegt, aber nicht etwa Invariante des Feldes an sich; sie hängt vielmehr von der gewählten „Ordnung" ab!

[1]) Die $\overset{\times}{=}$-Gleichung bedeutet, daß in dem durch formale Ausmultiplikation erhaltenen Summenausdruck immer zu setzen ist: $w_i^{(1)} \cdot w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$.

$$(c') \quad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\{\prod_{i=1}^{n}(1-w_i^{(2)}) + \prod_{i=1}^{n}(1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)})\},$$

$$(d') \quad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\{\prod_{i=1}^{n}(1-w_i^{(2)}) - \prod_{i=1}^{n}(1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)})\},$$

$$(e') \quad W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) - W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)}).$$

Analoge nicht weiter interessante Kombinationen findet man auch leicht für die Fälle (b) und (b′) aus § 4, 6. Die Existenz dieser Grenzwerte bestätigt die schon oben (§ 3) angekündigte Behauptung, daß alle in § 4, 6. definierten Folgensysteme Selektionssysteme im Sinne von Def. 6. sind. Für $\nu = 1$ ist unter (a′) auch das zuvor genannte Beispiel enthalten, wo die Grenzfolge φ_∞ die Folge der Primzahlen war.

§ 6. Ergebnisse über die Dichten aus § 5 bei Wachstumsstärken größer als eins.

Satz 2.

Ist $\sigma(\mathsf{E}, F) = \sigma > 1$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\delta)}{\varphi}_\infty) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\delta)}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn (δ) die folgenden Bedeutungen aus § 4, 6. hat:

(a): $(\delta) = (\nu)$, (a′): $(\delta) = (\nu)'$,

(b): $(\delta) = (\leqq \nu)$, (b′): $(\delta) = (\leqq \nu)'$.

Beweis: Es sei P_n' das Produkt, das aus $\prod_{i=1}^{n}(1-w_i^{(1)})$ durch Streichung der ν kleinsten Faktoren entsteht.

$\Sigma_n' w_i^{(1)}$ sei die Summe über die in P_n' auftretenden Werte $w_i^{(1)}$. Es ist offenbar:

$$\sum_{i=\nu}^{n} w_i^{(1)} \leqq \Sigma_n' w_i^{(1)} + \nu.$$

Ferner gilt für das in § 5 erklärte Teilprodukt:

$$\prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(1-w_i^{(1)}) \leqq P_n'.$$

Also folgt aus § 5, (a)

$$W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) \leqq P_n' \sum_{i_1,\ldots,i_\nu}(w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(1)} \cdots w_{i_\nu}^{(1)}) \leqq P_n' \,(\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)})^\nu.$$

Wegen $1 - x \leqq e^{-x}$ für $x \geqq 0$ gilt:

$$P_n' \leqq e^{-\Sigma_n' w_i^{(1)}} \leqq e^{-\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)+\nu}}$$

und somit:

$$W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) \leqq \frac{e^\nu (\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)})^\nu}{e^{\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)}}}.$$

Daher ergibt die Divergenz von $\Sigma w_i^{(1)}$, $(\sigma > 1)$:

$$(\bar{a}) \qquad \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Deshalb ist auch

$$(\bar{b}) \qquad \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} W(\overset{(\mu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Ferner ist, wie man aus § 5, (a), (a′) sofort sieht,

$$W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) \leqq W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}).$$

Nach ($\bar{a}$) ist also

($\bar{a}'$) $$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = 0,$$

und somit

($\bar{b}'$) $$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_n}) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\mu)'}{\varphi_n}) = 0.$$

Nun ist aber

$$R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n});$$

denn ersichtlich hat das Selektionssystem $(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n})$ sogar die Eigenschaft, daß seine Grenzfolge $\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}$ Teilfolge aller seiner Folgen ist.

Daher ist

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nach ($\bar{b}$) hat man:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Somit ist:

(b) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Daher gilt a fortiori und unter Berücksichtigung von ($\bar{b}'$) auch:

(b′) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_n}) = 0,$$

ferner nach ($\bar{a}$), (b):

(a) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = 0,$$

und nach ($\bar{a}'$), (b′):

(a′) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)'}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = 0.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wie schon in einer gemeinsamen Note [1]) von Herrn *Hasse* und mir gezeigt ist, ist in diesem Satz z. B. enthalten: Die Dichte der ganzen Hauptideale eines algebraischen Zahlkörpers, geordnet nach der Größe der Normen, die durch genau ν verschiedene oder durch höchstens ν verschiedene Primideale genau in der ersten oder in beliebiger Potenz teilbar sind, ist Null.

Wir bemerken, daß Satz 2 (Vertauschbarkeit der Grenzübergänge) für die Fälle (c), (c′), (d), (d′) aus § 4, 6. nicht ohne weitere Voraussetzungen gelten kann. Nimmt man nämlich z. B. die natürliche Zahlenfolge und multipliziert die erste quadratfreie Zahl, die eine gerade Anzahl Faktoren hat, mit der kleinsten zu ihr primen Primzahl, die zweite solche Zahl mit einer neuen, zu ihr und der ersten primen Primzahl und fährt

[1]) Leopoldina, Bd. III. (Ber. der kais. deutsch. Akad. d. Naturf. zu Halle): „Über die Dichte der quadratfreien Zahlen und ähnliche Dichten in einem algebraischen Zahlkörper."

$$(c') \quad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\{\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(2)}) + \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)})\},$$

$$(d') \quad \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\{\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(2)}) - \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)})\},$$

$$(e') \quad W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) - W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_n}) = \prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)}).$$

Analoge nicht weiter interessante Kombinationen findet man auch leicht für die Fälle (b) und (b′) aus § 4, 6. Die Existenz dieser Grenzwerte bestätigt die schon oben (§ 3) angekündigte Behauptung, daß alle in § 4, 6. definierten Folgensysteme Selektionssysteme im Sinne von Def. 6. sind. Für $\nu = 1$ ist unter (a′) auch das zuvor genannte Beispiel enthalten, wo die Grenzfolge φ_∞ die Folge der Primzahlen war.

§ 6. Ergebnisse über die Dichten aus § 5 bei Wachstumsstärken größer als eins.

Satz 2.

Ist $\sigma(\mathsf{E}, F) = \sigma > 1$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\delta)}{\varphi}_\infty) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\delta)}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn $(\overset{\delta}{\ })$ die folgenden Bedeutungen aus § 4, 6. hat:

(a): $(\overset{\delta}{\ }) = (\nu)$, (a′): $(\overset{\delta}{\ }) = (\nu)'$,

(b): $(\overset{\delta}{\ }) = (\leqq \nu)$, (b′): $(\overset{\delta}{\ }) = (\leqq \nu)'$.

Beweis: Es sei P_n' das Produkt, das aus $\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(1)})$ durch Streichung der ν kleinsten Faktoren entsteht.

$\Sigma_n' w_i^{(1)}$ sei die Summe über die in P_n' auftretenden Werte $w_i^{(1)}$. Es ist offenbar:

$$\sum_{i=\nu}^{n} w_i^{(1)} \leqq \Sigma_n' w_i^{(1)} + \nu.$$

Ferner gilt für das in § 5 erklärte Teilprodukt:

$$\prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)}(1 - w_i^{(1)}) \leqq P_n'.$$

Also folgt aus § 5, (a)

$$W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) \leqq P_n' \sum_{i_1,\ldots,i_\nu} (w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(1)} \cdots w_{i_\nu}^{(1)}) \leqq P_n' \,(\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)})^\nu.$$

Wegen $1 - x \leqq e^{-x}$ für $x \geqq 0$ gilt:

$$P_n' \leqq e^{-\Sigma_n' w_i^{(1)}} \leqq e^{-\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)} + \nu}$$

und somit:

$$W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) \leqq \frac{e^\nu (\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)})^\nu}{e^{\sum_{i=1}^{n} w_i^{(1)}}}.$$

Daher ergibt die Divergenz von $\Sigma w_i^{(1)}$, $(\sigma > 1)$:

$$(\bar{a}) \qquad \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Deshalb ist auch

$$(\bar{b}) \qquad \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} W(\overset{(\mu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Ferner ist, wie man aus § 5, (a), (a′) sofort sieht,

$$W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) \leqq W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}).$$

Nach ($\bar{a}$) ist also

($\bar{a}'$) $$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = 0,$$

und somit

($\bar{b}'$) $$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_n}) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\mu)'}{\varphi_n}) = 0.$$

Nun ist aber

$$R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n});$$

denn ersichtlich hat das Selektionssystem $(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n})$ sogar die Eigenschaft, daß seine Grenzfolge $\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}$ Teilfolge aller seiner Folgen ist.

Daher ist

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nach ($\bar{b}$) hat man:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Somit ist:

(b) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)}{\varphi_n}) = 0.$$

Daher gilt a fortiori und unter Berücksichtigung von ($\bar{b}'$) auch:

(b′) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\leqq\nu)'}{\varphi_n}) = 0,$$

ferner nach ($\bar{a}$), (b):

(a) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi_n}) = 0,$$

und nach ($\bar{a}'$), (b′):

(a′) $$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)'}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)'}{\varphi_n}) = 0.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wie schon in einer gemeinsamen Note [1]) von Herrn *Hasse* und mir gezeigt ist, ist in diesem Satz z. B. enthalten: Die Dichte der ganzen Hauptideale eines algebraischen Zahlkörpers, geordnet nach der Größe der Normen, die durch genau ν verschiedene oder durch höchstens ν verschiedene Primideale genau in der ersten oder in beliebiger Potenz teilbar sind, ist Null.

Wir bemerken, daß Satz 2 (Vertauschbarkeit der Grenzübergänge) für die Fälle (c), (c′), (d), (d′) aus § 4, 6. nicht ohne weitere Voraussetzungen gelten kann. Nimmt man nämlich z. B. die natürliche Zahlenfolge und multipliziert die erste quadratfreie Zahl, die eine gerade Anzahl Faktoren hat, mit der kleinsten zu ihr primen Primzahl, die zweite solche Zahl mit einer neuen, zu ihr und der ersten primen Primzahl und fährt

[1]) Leopoldina, Bd. III. (Ber. der kais. deutsch. Akad. d. Naturf. zu Halle): „Über die Dichte der quadratfreien Zahlen und ähnliche Dichten in einem algebraischen Zahlkörper."

so fort, so ist diese deformierte Folge offenbar für alle Primzahlen wieder E-Folge mit denselben Elementardichten $w_i^{(\alpha)}$; in ihr ist aber die Dichte der quadratfreien Zahlen, die eine gerade Anzahl Primfaktoren haben, null, während wegen $w_i^{(\alpha)} = \frac{1}{p_i^\alpha}$ nach der Formel am Schluß von § 5 gilt:

$$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right) + \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\zeta(2)} + 0^2\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\pi^2}.$$

Genau entsprechend zeigt man die Nichtvertauschbarkeit der Grenzübergänge in den Fällen (c), (c′) und (d).

Die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge $k\to\infty$ und $n\to\infty$ folgt also nicht allein aus den für E-Folgen zugrunde gelegten Forderungen, sondern muß durch Zusatzbedingungen gesichert werden.

Ohne solche Zusatzbedingungen kann ich noch folgenden Satz beweisen:

Satz 3.

Ist $\sigma > 2$, so ist

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_\infty}) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_n}) = 0$$

für (c′): $(\mathfrak{z}) = (\Sigma 2\nu)'$ und (d′): $(\mathfrak{z}) = (\Sigma(2\nu+1))'$.

Deshalb gilt auch

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M(k)}{k} = 0,$$

wo $M(k)$ folgendermaßen erklärt ist:

$$\frac{M(k)}{k} = R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_\infty}) - R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_\infty}),$$

also $M(k) = \sum_{k=1}^{k}\mu(a_k)$, wo $\mu(a_k) = 0$ für „nicht-quadratfreies“ a_k und $\mu(a_k) = (-1)^\tau$ für „quadratfreies“ a_k, dem genau τ verschiedene Eigenschaften zukommen, gesetzt ist.

Beweis: Ist ψ die Teilfolge der „quadratfreien“ Elemente aus F, so gilt in beiden Fällen:

$$R_k(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_\infty}) \leqq R_k(\psi).$$

Weil $\lim_{k\to\infty} R_k(\psi) = 0$ ist, folgt:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_\infty}) = 0, \quad \text{d. h. } \lim_{k\to\infty} R(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_\infty}) = 0.$$

Betrachtet man nämlich F als H-Folge, wo $\mathsf{H} = (e_i^2)$ ist, so folgt das nach Satz 2 mit $\nu = 0$ wegen $\sigma(\mathsf{H}, F) > 1$ sofort.

Nach den Schlußformeln von § 5 ist aber:

$$W(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_n}) = \frac{1}{2}\left\{\prod_{i=1}^{n}(1-w_i^{(2)}) \pm \prod_{i=1}^{n}(1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)})\right\}.$$

Wegen der vorausgesetzten Divergenz von $\sum_i w_i^{(2)}$ ist:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-w_i^{(2)}) = 0.$$

Ferner ist wegen der trivialen Ungleichung $W(\overset{(\mathfrak{z})}{\varphi_n}) \geqq 0$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - w_i^{(2)}) \geqq \left|\prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)})\right| .$$

Daher folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)}) = 0 ,$$

also auch:

$$\lim_{n\to\infty} W(\overset{(3)}{\varphi}_n) = 0 ,$$

was die Behauptung ergibt.

Die nächsten Paragraphen sollen sich mit Zusatzbedingungen befassen, die die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge im Falle $\sigma = 1$ sichern.

§ 7. Beschränkte E-Folgen.

Definition 9.

Eine E-Folge heißt „*beschränkt*", wenn eine Zahl c_i existiert, so, daß gilt:

1. $R_k(e_i) \leqq c_i\, w_i^{(1)}$ für fast alle i und jedes k,
2. $\sum_i c_i w_i^{(1)}$ konvergiert.

Da wegen $\lim_{k\to\infty} R_k(e_i) = w_i^{(1)}$ sicherlich fast alle in 1. geforderten $c_i \geqq 1$ sein müssen, so ist wegen der Forderung 2. a fortiori $\sum_i w_i^{(1)}$ konvergent, also die Wachstumsstärke $\sigma(\mathsf{E}, F) = 1$ für jede beschränkte E-Folge F.

Als Beispiel einer beschränkten E-Folge sei die Folge der natürlichen Zahlen genannt, wenn unter e_i die Teilbarkeit durch das i-te Primzahlquadrat p_i^2 verstanden wird. Dann ist wegen

$$R_k(e_i) = \frac{1}{k}\left[\frac{k}{p_i^2}\right] \leqq \frac{1}{p_i^2} = w_i^{(1)}$$

die Bedingung 1. mit $c_i = 1$ erfüllt, und es ist auch die Bedingung 2. richtig, da $\sum_i \frac{1}{p_i^2}$ konvergiert.

Ich zeige nun im folgenden, daß die in obiger Definition eingeführte „Beschränktheit" als Zusatzbedingung im Sinne von § 6, Schluß, geeignet ist, d. h. ich beweise folgenden, die Vertauschbarkeit der fraglichen Grenzübergänge garantierenden

Hauptsatz 4.

Ist F eine beschränkte E*-Folge und*

$$\Phi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

ein Selektionssystem aus F mit der Grenzfolge φ_∞, so gilt:

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_\infty) = \lim_{m\to\infty} W(\varphi_m) .$$

Beweis: Bekanntlich gilt: [1])

Ist $\{a_k^{(m)}\}$ eine Doppelfolge reeller Zahlen und existiert

1. $a_\infty^{(m)} = \lim_{k\to\infty} a_k^{(m)}$ für jedes m,
2. $a_k^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} a_k^{(m)}$ für jedes k,

und ist ferner

[1]) Der Beweis findet sich z. B. bei *Hahn*: „Reelle Funktionen".

$\lim\limits_{m\to\infty} a_k^{(m)}$ gleichmäßig in k,

so folgt die Existenz und Gleichheit der Doppelgrenzwerte:

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_k^{(m)} \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty} a^{(m)}_{\infty}\,.$$

Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} a_{\infty}^{(m)}\,.$$

Identifiziert man nun $a_k^{(m)}$ mit $R_k(\varphi_m)$, so ist zunächst die Existenz der folgenden beiden Grenzwerte festzustellen:

1. $$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_m) = W(\varphi_m)\,,$$

2. $$\lim_{m\to\infty} R_k(\varphi_m) = R_k(\varphi_\infty)\,.$$

Diese folgt aber unmittelbar aus den beiden Forderungen der Definition der Selektionssysteme.

Um nun die Gültigkeit von

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_\infty) = \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty} R_k(\varphi_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_m) = \lim_{m\to\infty} W(\varphi_m)$$

zu beweisen, ist also nur noch die Gleichmäßigkeit von 2. in k zu zeigen, d. h. die Existenz eines $m_1 = m_1(\varepsilon)$ derart, daß für alle k gilt:

$$|\,R_k(\varphi_m) - R_k(\varphi_\infty)\,| < \varepsilon, \quad \text{wenn } m \geqq m_1(\varepsilon).$$

Um ein solches $m_1(\varepsilon)$ zu erhalten, knüpfen wir an die beiden Forderungen 1. und 2. in der Def. 9 der beschränkten E-Folgen an. Nach der ersten existiert ein n_1, so daß

$$R_k(e_i) \leqq c_i w_i^{(1)} \quad \text{für} \quad i > n_1 \quad \text{und alle } k$$

und nach der zweiten ein $n_2(\varepsilon)$, so daß

$$\sum_{i>n} c_i w_i^{(1)} < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_2(\varepsilon).$$

Wir setzen nun

$$n_3 = n_3(\varepsilon) = \text{Max}\,(n_1, n_2(\varepsilon)) \quad \text{und} \quad m_1(\varepsilon) = m_0(n_3)\,,$$

wo m_0 die Bedeutung aus Def. 6. der Selektionssysteme hat. Für alle k gilt dann zunächst:

$$|\,R_k(\varphi_m) - R_k(\varphi_\infty)\,| \leqq \sum_{i>n_3} R_k(e_i), \text{ wenn } m \geqq m_1(\varepsilon),$$

denn in der Differenz links heben sich, da nach Konstruktion $m \geqq m_0(n_3)$ ist, die Beiträge aller der Elemente von F heraus, denen keine Eigenschaft von höherem Index als n_3 zukommt. Da ferner $n_3 \geqq n_1$ und $n_3 \geqq n_2(\varepsilon)$ ist, gilt nach dem oben schon Festgestellten für alle k:

$$|\,R_k(\varphi_m) - R_k(\varphi_\infty)\,| \leqq \sum_{i>n_3} R_k(e_i) \leqq \sum_{i>n_3} c_i w_i^{(1)} < \varepsilon, \text{ wenn } m \geqq m_1(\varepsilon)\,.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

§ 8. Die Dichten aus § 5, die Funktion $M(x)$ und der allgemeine Dirichletsche Reihensatz in beschränkten E-Folgen.

Da nach § 5 die $(\overset{(\delta)}{\varphi}_n)$ für alle 8 Bedeutungen der (δ) aus § 4, 6. Selektionssysteme sind, so erhält man für sie auf Grund des Hauptsatzes 4 leicht folgende Sätze:

Satz 5.

In beschränkten E-Folgen ist dann und nur dann

$$W(\overset{(\nu)}{\varphi}_\infty) = \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn mehr als ν der $w_i^{(1)} = 1$ oder weniger als ν der $w_i^{(1)} \neq 0$ sind.

Beweis: Nach Hauptsatz 4 ist $\lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)}{\varphi}_\infty) = \lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi}_n)$.

a) Sind die Voraussetzungen erfüllt, so verschwindet in § 5, (a) für jedes hinreichend große n jeder Summand, also ist auch $\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi}_n) = 0$.

b) Sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, so sind also höchstens ν der $w_i^{(1)} = 1$ und mindestens ν der $w_i^{(1)} \neq 0$. Ist demgemäß $w_i^{(1)}, \ldots, w_{i_\nu}^{(1)}$ eine *feste* (von n unabhängige) Kombination aus den $w_i^{(1)}$, die alle ev. $w_i^{(1)} = 1$ und kein $w_i^{(1)} = 0$ enthält, so ist ersichtlich für alle $n \geqq i_1, \ldots, i_\nu$

$$w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(1)} \cdots w_{i_\nu}^{(1)} \prod_{i=1,n}^{(i_1,\ldots,i_\nu)} (1 - w_i^{(1)}) \neq 0,$$

und also auch der Grenzwert für $n \to \infty$ dieses Gliedes aus § 5, (a) von Null verschieden, weil $\Sigma w_i^{(1)}$ konvergiert. Daher ist a fortiori $\lim_{n\to\infty} W(\overset{(\nu)}{\varphi}_n) \neq 0$.

Satz 6.

In beschränkten E-Folgen ist dann und nur dann

$$W(\overset{(\nu)'}{\varphi}_\infty) = \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\nu)'}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn mehr als ν der $w_i^{(1)} = 1$ oder weniger als ν der $w_i^{(1)} \neq w_i^{(2)}$ sind, oder wenn mindestens ein $w_i^{(2)} = 1$ ist.

Beweis: Analog zu dem von Satz 5 aus der Formel § 5, (a′).

Satz 7.

In beschränkten E-Folgen ist dann und nur dann

$$W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi}_\infty) = \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn entweder mindestens ein $w_i^{(2)} = 1$ ist, oder wenn eine ungerade Anzahl $w_i^{(1)} = 1$ ist und außerdem für alle i, für die $w_i^{(1)} \neq 1$ ist, $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$ gilt.

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 3 gilt: $1 - w_i^{(2)} \geqq |1 - 2w_i^{(1)} + w_i^{(2)}|$, und zwar gilt die Gleichheit nur für $w_i^{(1)} = 1$ oder $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$. Aus § 5, (c′) findet man nun leicht, daß die Bedingungen des Satzes notwendig sind, wenn man hinzunimmt, daß wegen $\sigma = 1$ nur endlich viele $w_i^{(1)} = 1$ sein können. Daß die Bedingungen hinreichend sind, lehrt wieder die Formel § 5, (c′).

Satz 8.

In beschränkten E-Folgen ist dann und nur dann

$$W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi}_\infty) = \lim_{k\to\infty} R_k(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi}_\infty) = 0,$$

wenn entweder mindestens ein $w_i^{(2)} = 1$ ist, oder wenn eine gerade Anzahl $w_i^{(1)} = 1$ ist und außerdem für alle i, für die $w_i^{(1)} \neq 1$ ist, $w_i^{(1)} = w_i^{(2)}$ gilt.

Beweis: Analog zu dem von Satz 7 unter Verwendung von § 5, (d′).

Satz 9.

In beschränkten E-Folgen ist dann und nur dann

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M(k)}{k}=0,$$

wenn für mindestens ein i: $1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)}=0$ ist.

Beweis: Nach § 5, (e′) und dem Hauptsatz 4 ist

$$W(\overset{(\Sigma 2\nu)'}{\varphi_\infty})-W(\overset{(\Sigma(2\nu+1))'}{\varphi_\infty})=\lim_{k\to\infty}\frac{M(k)}{k}=\prod_{i=1}^{\infty}(1-2w_i^{(1)}+w_i^{(2)}).$$

Wegen $w_i^{(1)}\geqq w_i^{(2)}$ ist nun das Produkt für beschränkte E-Folgen absolut konvergent und verschwindet nur dann, wenn irgendein Faktor null ist.

Jetzt soll ein Satz bewiesen werden, der als „*allgemeiner Dirichletscher Reihensatz*“ für beschränkte E-Folgen bezeichnet werden kann. Dazu muß ich etwas weiter ausholen.

Ich beweise zunächst:

Satz 10.

Ist eine Teilfolge $\overline{F}$ einer beschränkten E-Folge F wieder E-Folge, so ist sie auch beschränkte E-Folge, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,R_k(\overline{F})>0$,
2. Nur für endlich viele i gilt gleichzeitig:

$$\overline{w}_i^{(1)}=0 \text{ und } \overline{R}_{\bar{k}}(e_i)\not\equiv 0 \quad \text{(d. h. } \neq 0 \text{ für mindestens ein } \bar{k}).$$

Dabei bedeutet $\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)$ die relative Häufigkeit von e_i in $\overline{F}$ bis $\bar{k}$ inkl. und $\overline{w}_i^{(1)}$ die entsprechende Dichte.

Beweis: Kommen in F bis a_k inkl. $\bar{k}$ Elemente aus $\overline{F}$ vor, so gilt offenbar:

$$\bar{k}\,\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)\leqq k R_k(e_i).$$

Also folgt:

$$\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)\leqq\frac{R_k(e_i)}{\frac{\bar{k}}{k}}.$$

Weil k und $\bar{k}$ monoton miteinander wachsen, ferner wegen $\frac{\bar{k}}{k}=R_k(\overline{F})$ und nach der ersten Voraussetzung $\overline{\lim_{k\to\infty}}\,R_k(\overline{F})>0$, gibt es eine Zahl $\gamma>0$, so daß für alle $\bar{k}>0$ immer $\frac{\bar{k}}{k}>\gamma$ ist. Für fast alle e_i (mit Ausnahme der durch Def. 9 gestatteten endlich vielen Ausnahmen) gilt daher:

$$\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)\leqq\frac{1}{\gamma}c_i w_i^{(1)} \quad \text{für alle } \bar{k}.$$

Da nun wegen $k\geqq\bar{k}>k\gamma$ mit $k\to\infty$ auch $\bar{k}\to\infty$ geht und umgekehrt, so folgt also:

$$\lim_{k\to\infty}\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)=\lim_{\bar{k}\to\infty}\overline{R}_{\bar{k}}(e_i)=\overline{w}_i^{(1)}\leqq\frac{1}{\gamma}c_i w_i^{(1)}.$$

Man wähle nun:

1. für $\overline{w}_i^{(1)}\neq 0$: $\bar{c}_i=\dfrac{c_i w_i^{(1)}}{\gamma\,\overline{w}_i^{(1)}}$

2. für $\overline{w}_i^{(1)} = 0$ und $\overline{R}_{\bar{k}}(e_i) \equiv 0 : \bar{c}_i = 0$,
3. für die nach der zweiten Voraussetzung nur noch endlich vielen Restfälle ist : $\bar{c}_i$ beliebig.

Man sieht sofort, daß bei dieser Wahl für fast alle i gilt:

$$\overline{R}_{\bar{k}}(e_i) \leqq \bar{c}_i \overline{w}_i^{(1)} \text{ für jedes } \bar{k}$$

und daß $\sum_{i=1}^{\infty}{}' \bar{c}_i \overline{w}_i^{(1)}$ konvergiert.

Damit ist Satz 10 bewiesen.

Durch Kombination von Satz 10 mit Satz 6 erhält man unmittelbar den angekündigten

Satz 11. (*Allgemeiner Dirichletscher Reihensatz für beschränkte* E*-Folgen*).

Genügt eine Teilfolge $\overline{F}$ einer beschränkten E-Folge den Bedingungen von Satz 10, so ist die Dichte in $\overline{F}$ der Elemente, denen genau ν Eigenschaften, jede nur in erster Potenz, zukommen, dann und nur dann null, wenn mehr als ν der $\overline{w}_i^{(1)} = 1$ oder weniger als ν der $\overline{w}_i^{(1)} \neq \overline{w}_i^{(2)}$ sind, oder wenn mindestens ein $\overline{w}_i^{(2)} = 1$ ist.

Man sieht aus den vorstehenden Beispielen, daß man die Eigenschaften der beschränkten E-Folgen weitgehend ergründen kann.

Zum Schluß will ich noch einen Begriff einführen, der die Untersuchung tatsächlich gegebener E-Folgen sehr erleichtert. Er führt nämlich zu einem für die Anwendungen wichtigen Satz, der den Übergang zu „abgeleiteten" Eigenschaftssystemen gestattet [1]).

Definition 10.

H = H(E) heißt „*Sekundärsystem*" von E, wenn H aus paarweise eigenschaftsfremden Kombinationen η_i von Symbolen aus E besteht.

Es leuchtet ein, daß jede E-Folge F auch H-Folge ist und daß jedes η_i aus H in der H-Folge F dieselbe Dichte hat, wie in der E-Folge F.

Überdies gilt aber der angekündigte

Satz 12.

Ist in einer beschränkten E-Folge für nur endlich viele i ein $\alpha_i\ (> 1)$ vorhanden, so daß zwar

$$w_i^{(1)} \neq 0 \text{ aber } w_i^{(\alpha_i)} = 0 \text{ ist,}$$

(d. h. folgt für fast alle i aus $w_i^{(\alpha_i)} = 0$ für irgendein α_i auch $w_i^{(1)} = 0$), so ist F auch beschränkte H-Folge für jedes Sekundärsystem H(E).

Beweis: Sei $\eta = e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2} \cdots e_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$ ein Element aus H.

Es ist dann

$$R_k(\eta) = R_k(e_{i_1}^{\alpha_1} \cdots e_{i_\nu}^{\alpha_\nu}).$$

Ich zeige nun zunächst, daß es höchstens endlich viele η gibt, für die gilt:

$$w(\eta) = 0,$$

aber

$$R_k(\eta) \not\equiv 0, \quad \text{(d. h. } \neq 0 \text{ für mindestens ein } k).$$

Angenommen nämlich, es gäbe unendlich viele η dieser Art, so ist einerseits wegen $R_k(e_{i_\varrho}^{\alpha_\varrho}) \geqq R_k(\eta)$ jedes $R_k(e_{i_\varrho}^{\alpha_\varrho}) \not\equiv 0$, andererseits mindestens ein $w_{i_\varrho}^{(\alpha_\varrho)} = 0$. Weil die verschiedenen η aus verschiedenen e_i zusammengesetzt sind, gäbe es also auch un-

[1]) Vergl. z. B. den Beweis von Satz 3.

endlich viele i, für die bei einem gewissen α_i gleichzeitig $R_k(e_i^{\alpha_i}) \equiv\!|\!\equiv 0$, $w_i^{(\alpha_i)} = 0$, wegen $R_k(e_i) \geqq R_k(e_i^{\alpha_i})$ also auch $R_k(e_i) \equiv\!|\!\equiv 0$, $w_i^{(\alpha_i)} = 0$ wäre.

Nach den im Satz gemachten Voraussetzungen wäre also auch für unendlich viele i gleichzeitig $R_k(e_i) \equiv\!|\!\equiv 0$, $w_i^{(1)} = 0$, was der Bedingung 1. von Definition 9 widerspricht.

Für die sonach nur in endlicher Anzahl vorhandenen η_l mit $w(\eta_l) = 0$, $R_k(\eta_l) \equiv\!|\!\equiv 0$ sei γ_l beliebig gewählt. Ist ferner $w(\eta_l) = 0$, $R_k(\eta_l) \equiv 0$, so sei $\gamma_l = 0$ gewählt. Für die übrigen η_l, für die also $w(\eta_l) \neq 0$ ist, sei $e_i^{\alpha_i}$ irgendeiner der Faktoren von η_l. Dann gilt nach Def. 9:

$$R_k(\eta_l) \leqq R_k(e_i^{\alpha_i}) \leqq R_k(e_i) \leqq c_i w_i^{(1)} = w(\eta_l) \cdot \frac{c_i w_i^{(1)}}{w(\eta_l)} .$$

Ich wähle dann:

$$\gamma_l = \frac{c_1 w_i^{(1)}}{w(\eta_l)} .$$

Bei der so für alle η_l getroffenen Wahl der Faktoren γ_l gilt dann einerseits nach Konstruktion:

$$R_k(\eta_l) \leqq \gamma_l w(\eta_l)$$

für fast alle l und jedes k. Andererseits ist ersichtlich:

$$\sum_l \gamma_l w(\eta_l) \text{ konvergent.}$$

Nach Def. 9 ist F also auch als H-Folge beschränkt.

Zur Frage der *zahlentheoretischen* Anwendungen sei hier nur nachstehendes gesagt:

In meiner schon in Anm. 1 (S. 191) zitierten gemeinsamen Note mit Herrn *Hasse* wurde gezeigt, daß die Folge der nach wachsenden Normen geordneten ganzen Hauptideale eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades in bezug auf die Teilbarkeit durch Primidealpotenzen der Beschränktheitsbedingung von Def. 9 genügt. Daraus ergaben sich einige Dichtigkeitssätze, die als Spezialfälle unter den im Vorstehenden entwickelten allgemeinen Sätzen (insbesondere § 7, Hauptsatz 4) enthalten sind. Zur Erreichung einer größeren Anschaulichkeit des Inhalts dieser ersten Mitteilung kann man sich leicht an Hand der eben genannten Note zahlentheoretische Anwendungsbeispiele bilden.

Die nächste Mitteilung soll hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge bei Wachstumsstärken größer als Eins bringen.

Eingegangen 11. 5. 1928.